



Historia de la resolución de ecuaciones

1. Ecuaciones cúbicas. Fórmula de Cardano-Tartaglia.
2. Ecuaciones cuárticas. Fórmula de Ferrari.
3. Ecuaciones de grado superior a cuatro.
4. Resolución de ecuaciones de grado cinco o más.
5. Resolución numérica de ecuaciones. Método de Newton-Raphson.
6. Resolución de ecuaciones aplicando la función W de Lambert.

Autor: Manuel Águila Varela

1. Ecuaciones cúbicas. Fórmula de Cardano-Tartaglia.

Diofanto de Alejandría resuelve, en el siglo III y sin seguir ningún método riguroso, las primeras ecuaciones elementales. Posteriormente, en el siglo IX, matemáticos árabes entre los que destaca **Al-Juarismi**, se enfrentan con éxito y bastante rigor a numerosas ecuaciones de primer y segundo grado.

No es hasta mediados del siglo XII cuando el matemático indio **Baskhara** establece la famosa fórmula general para resolver cualquier ecuación de segundo grado:

$$ax^2 + bx + c = 0 \rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

La obtuvo aplicando las identidades notables y completando para obtener el desarrollo de un cuadrado y luego despejar:

- Para ello se multiplica por 4a:

$$4a \cdot (ax^2 + bx + c) = 4a \cdot 0 \rightarrow 4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0$$

- Se lleva el término independiente al segundo miembro de la ecuación:

$$4a^2x^2 + 4abx = -4ac$$

- Se suma b^2 en los dos miembros de la ecuación:

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = -4ac + b^2$$

- Se observa que el primer miembro es el desarrollo del cuadrado de una suma:

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$$

- Ya aparece una sola vez la incógnita x y se despeja:

$$2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac} \rightarrow 2ax = -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac} \rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Baskhara dedicó a su hija Lilavati un libro con este mismo nombre. En él, se dirige a su hija con ternura para enseñarle los secretos de las matemáticas mediante ejercicios en verso.

¿Y existen fórmulas similares para resolver ecuaciones de grado mayor que dos?

Habrá que esperar hasta el siglo XVI para obtener la fórmula que resuelve las ecuaciones de grado tres. Se trata de una historia apasionante que transcurre entre Bolonia, Milán y Venecia, con secretos, retos públicos y traiciones.

A principios del siglo XVI, **Scipione del Ferro**, profesor de la Universidad de Bolonia, se enfrenta con éxito a la ecuación de tercer grado $x^3 + px + q = 0$, encontrando una fórmula similar a la de la ecuación de segundo grado:

$$x = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{-q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

Fue un gran avance de las matemáticas pero no se sabe el año exacto en que se produjo, ni la forma en que Del Ferro lo consiguió.

Del Ferro no comunicó a nadie su descubrimiento. Solo en su lecho de muerte, se la transmitió a su yerno, Annibale della Nave y a su alumno veneciano Antonio María del Fiore.

En aquella época era costumbre entre los más reputados matemáticos, retarse a disputas públicas en las que cada uno debía resolver los problemas planteados por el otro. El triunfo suponía un gran prestigio y la posibilidad de optar a mecenazgo o a un puesto destacado en la Universidad.

Del Fiore, consciente del tesoro que poseía, retó al gran matemático veneciano **Niccolo Fontana**, conocido por el sobrenombre de **Tartaglia** (quedó tartamudo a causa de un grave accidente que tuvo de joven).

El reto entre ambos se produjo a principios de 1535. Cada uno tenía que presentar una lista de 30 problemas para que los resolviera su oponente. La lista quedaría sellada y depositada ante notario. Después de esto, disponían de 50 días para tratar de obtener las soluciones. Del Fiore propuso una serie de problemas que solo era posible resolver si se conocía la citada fórmula. No obstante, Tartaglia fue capaz de redescubrirla y venció a Del Fiore.

Gerolamo Cardano, posiblemente el más famoso matemático de esa época, se dirige con su joven ayudante, Ludovico Ferrari, al encuentro de Tartaglia para conocer los pormenores de tan magno descubrimiento. Ante su insistencia, Tartaglia acaba revelando su secreto tras jurar solemnemente Cardano no divulgarlo.

Cardano no contento con esto, decide visitar a Della Nave y estudiar los papeles póstumos de Del Ferro. Y entre ellos, ¡encuentra el método operativo que desemboca en la fórmula! Se ve así liberado de su juramento a Tartaglia. Él publicará lo descubierto entre los papeles de Del Ferro, no lo revelado por Tartaglia.

El método encontrado lo refleja Cardano en su obra maestra de las matemáticas del siglo XVI, el **Ars Magna**.

Tartaglia no atenderá a razones y seguirá una agria disputa de la que Cardano se desentenderá, dejando su defensa en manos de Ludovico Ferrari. Ambas partes no dudarán en imprimir sucesivos carteles, que repartirán entre los matemáticos de la época, tratando de defender su versión de los hechos. Finalmente, Ferrari acabará venciendo en un reto público celebrado en Milán a un ya viejo y cansado Tartaglia.

Para obtener la fórmula de Cardano-Tartaglia para resolver la ecuación cúbica incompleta:

$$x^3 + px + q = 0$$

partimos de la identidad notable: $(u + v)^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3$

Se saca factor común de los términos centrales: $(u + v)^3 = u^3 + 3uv(u + v) + v^3$

Y operando para igualar a cero queda: $(u + v)^3 - 3uv(u + v) - u^3 - v^3 = 0$

Comparando con la ecuación a resolver $x^3 + px + q = 0$

y llamando $p = -3uv$ y $q = -u^3 - v^3$

$(u + v)^3 - \underbrace{3uv}_{p}(u + v) - \underbrace{u^3 - v^3}_{q} = 0$, una solución de la ecuación sería: $x = u + v$

Entonces se trata de encontrar los valores de u y v que cumplan esas condiciones, o sea, se trata de resolver el sistema:

$$\begin{cases} 3uv = -p & \rightarrow v = \frac{-p}{3u} \\ u^3 + v^3 = -q & \searrow u^3 + \left(\frac{-p}{3u}\right)^3 = -q, \quad u^3 - \frac{p^3}{27u^3} = -q, \quad 27u^6 - p^3 = -27qu^3 \end{cases}$$

$27u^6 + 27qu^3 - p^3 = 0$ que es una ecuación bicuadrada en u^3 :

$$u^3 = \frac{-27q \pm \sqrt{729q^2 + 108p^3}}{54} = \frac{-27q}{54} \pm \frac{\sqrt{729q^2 + 108p^3}}{54} = \frac{-q}{2} \pm \sqrt{\frac{729q^2}{2916} + \frac{108p^3}{2916}} =$$

$$= \frac{-q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} = \frac{-q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

Entonces un valor de u sería: $u = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$

$$v^3 = -q - u^3, \quad v^3 = -q - \left(\frac{-q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}\right), \quad v^3 = -q + \frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3},$$

$$v^3 = \frac{-q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

Y un valor de v sería: $v = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$

Entonces resulta que una solución de la ecuación es $x = u + v$.

Por lo cual, llamando $\Delta = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3$, las soluciones son:

$$x^3 + px + q = 0 \rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} + \sqrt{\Delta}} + \sqrt[3]{\frac{-q}{2} - \sqrt{\Delta}}$$

A Δ se le denomina discriminante y según su valor nos da los tipos de soluciones de la ecuación cúbica:

- Si $\Delta > 0$ la ecuación tiene una solución real y dos soluciones complejas conjugadas.
- Si $\Delta = 0$ la ecuación tiene tres soluciones reales, dos al menos iguales.
- Si $\Delta < 0$ la ecuación tiene tres soluciones reales distintas.

Lo que sorprendió mucho a los algebristas del siglo XVI es que utilizando la fórmula de Cardano-Tartaglia para el caso de una ecuación cúbica que tenga tres raíces reales distintas, se topaban con la raíz cuadrada de un número negativo. Esta situación perpleja llevó a **Rafael Bombelli**, contemporáneo de Cardano, a tener la "idea loca" (según el mismo la llamó) de operar con esas raíces, a las que denominó "cantidades salvajes", como si se pudiera, y llegó a la conclusión de que, si se admitiese esas operaciones, se obtendrían las soluciones reales buscadas. De este modo, introdujo los números que posteriormente **Euler** denominaría "imaginarios", llamando a $\sqrt{-1} = i$, unidad imaginaria.

Ejemplo 1. Resuelve la ecuación $x^3 - 5x + 6 = 0$

$$p = -5 \quad y \quad q = 6 \rightarrow \Delta = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = \left(\frac{6}{2}\right)^2 + \left(\frac{-5}{3}\right)^3 = 9 - \frac{125}{27} = \frac{243 - 125}{27} = \frac{118}{27}$$

$\Delta = \frac{118}{27} > 0 \Rightarrow$ La ecuación tiene una solución real y dos soluciones complejas conjugadas.

La raíz real la obtenemos aplicando la fórmula de Cardano-Tartaglia:

$$x = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} + \sqrt{\Delta}} + \sqrt[3]{\frac{-q}{2} - \sqrt{\Delta}} = \sqrt[3]{\frac{-6}{2} + \sqrt{\frac{118}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{-6}{2} - \sqrt{\frac{118}{27}}} = \sqrt[3]{-3 + \sqrt{\frac{118}{27}}} + \sqrt[3]{-3 - \sqrt{\frac{118}{27}}} = \underline{\underline{-2,6891}}$$

Comprobamos por la regla de Ruffini que es solución de la ecuación:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & -5 & 6 \\ -2,6891 & & -2,6891 & 7,2313 & -6 \\ \hline & 1 & -2,6891 & 2,2313 & \underline{0} \end{array}$$

$$x^2 - 2,6891x + 2,2313 = 0 \quad \rightarrow \quad x = \frac{2,6891 \pm \sqrt{7,2313 - 8,9252}}{2} = \frac{2,6891}{2} \pm \frac{\sqrt{-1,6939}}{2} =$$

$$= 1,34455 \pm \frac{\sqrt{1,6939}}{2}i = 1,34455 \pm 0,65075i$$

Las soluciones de la ecuación $x^3 - 5x + 6 = 0$ son:

$x_1 = -2,6891$
$x_2 = 1,34455 + 0,65075i$
$x_3 = 1,34455 - 0,65075i$

Ejemplo 2. Resuelve la ecuación $x^3 - x - \frac{2\sqrt{3}}{9} = 0$

$$p = -1 \quad y \quad q = \frac{-2\sqrt{3}}{9} \quad \rightarrow \quad \Delta = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = \left(\frac{-\cancel{2}\sqrt{3}}{9}\right)^2 + \left(\frac{-1}{3}\right)^3 = \frac{3}{81} - \frac{1}{27} = \frac{1}{27} - \frac{1}{27} = 0$$

$\Delta = 0 \Rightarrow$ La ecuación tiene tres soluciones reales y al menos una es doble.

Una de las raíces reales la obtenemos aplicando la fórmula de Cardano-Tartaglia:

$$x = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} + \sqrt{\Delta}} + \sqrt[3]{\frac{-q}{2} - \sqrt{\Delta}} = \sqrt[3]{\frac{\cancel{2}\sqrt{3}}{9} + \sqrt{0}} + \sqrt[3]{\frac{\cancel{2}\sqrt{3}}{9} - \sqrt{0}} = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{3}}{9}} + \sqrt[3]{\frac{\sqrt{3}}{9}} = 2\sqrt[3]{\frac{\sqrt{3}}{9}} = \sqrt[3]{\frac{8\sqrt{3}}{9}} =$$

$$= \sqrt[3]{\frac{\sqrt{64 \cdot 3}}{81}} = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{64}}{27}} = \sqrt[3]{\frac{64}{27}} = \sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \underline{\underline{\frac{2\sqrt{3}}{3}}}$$

Comprobamos por la regla de Ruffini que es solución de la ecuación:

$$\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & -1 & \frac{-2\sqrt{3}}{9} \\ \frac{2\sqrt{3}}{3} & \frac{2\sqrt{3}}{3} & \frac{4}{3} & \frac{2\sqrt{3}}{9} \\ \hline 1 & \frac{2\sqrt{3}}{3} & \frac{1}{3} & \underline{0} \end{array}$$

$$x^2 + \frac{2\sqrt{3}}{3}x + \frac{1}{3} = 0 \rightarrow x = \frac{\frac{-2\sqrt{3}}{3} \pm \sqrt{\frac{4}{9} - \frac{4}{9}}}{2} = \frac{\frac{-2\sqrt{3}}{3} \pm \sqrt{0}}{2} = \frac{\cancel{2}\sqrt{3}}{\cancel{2}} = \underline{\underline{\frac{-\sqrt{3}}{3}}} \text{ Raíz real doble}$$

Las soluciones de la ecuación $x^3 - x - \frac{2\sqrt{3}}{9} = 0$ son: $x_1 = \frac{2\sqrt{3}}{3}, x_2 = \frac{-\sqrt{3}}{3}, x_3 = \frac{-\sqrt{3}}{3}$

Ejemplo 3. Resuelve la ecuación $x^3 - 6x + 2 = 0$

$$p = -6 \quad y \quad q = 2 \rightarrow \Delta = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = \left(\frac{2}{2}\right)^2 + \left(\frac{-6}{3}\right)^3 = 1^2 + (-2)^3 = 1 - 8 = -7, \quad \Delta = -7 < 0 \Rightarrow$$

La ecuación tiene tres soluciones reales distintas.

Aplicando la fórmula de Cardano-Tartaglia:

$$\begin{aligned} x = u + v &= \sqrt[3]{\frac{-q}{2} + \sqrt{\Delta}} + \sqrt[3]{\frac{-q}{2} - \sqrt{\Delta}} = \sqrt[3]{\frac{-2}{2} + \sqrt{-7}} + \sqrt[3]{\frac{-2}{2} - \sqrt{-7}} = \sqrt[3]{-1 + \sqrt{-7}} + \sqrt[3]{-1 - \sqrt{-7}} = \\ &= \sqrt[3]{-1 + \sqrt{7}i} + \sqrt[3]{-1 - \sqrt{7}i} \end{aligned}$$

La peculiaridad sorprendente de la fórmula de Cardano-Tartaglia es que para hallar las tres raíces reales de la ecuación se ha de hallar las raíces cúbicas de un número complejo:

Para hallar $u = \sqrt[3]{-1 + \sqrt{7}i}$, pasamos el número complejo a forma polar:

$$\text{Módulo: } r = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{7})^2} = \sqrt{1+7} = \underline{\underline{\sqrt{8}}}$$

$$\text{Argumento: } \alpha = \text{arc tg} \left(\frac{\sqrt{7}}{-1} \right) = \text{arc tg} (-\sqrt{7}) = 110.7048^\circ$$

$$\underline{\underline{-1 + \sqrt{7}i = \sqrt{8}_{110.7048^\circ}}}$$

$$\sqrt[3]{-1 + \sqrt{7}i} = \sqrt[3]{\sqrt{8}_{110.7048^\circ}} = \left(\sqrt[3]{\sqrt{8}}\right)_{\frac{110.7048^\circ + k360^\circ}{3}} = \sqrt[3]{\sqrt{8}}_{\frac{110.7048^\circ + k360^\circ}{3}} = \sqrt{2}_{\frac{110.7048^\circ + k360^\circ}{3}} =$$

$$= \begin{cases} k=0, & u_1 = \sqrt{2}_{\frac{110.7048^\circ}{3}} = \sqrt{2}_{36.9016^\circ} = \sqrt{2}(\cos 36.9016^\circ + i \operatorname{sen} 36.9016^\circ) = \\ & \underline{\underline{1.1309 + 0.84915i}} \\ k=1, & u_2 = \sqrt{2}_{\frac{110.7048^\circ + 360^\circ}{3}} = \sqrt{2}_{156.9016^\circ} = \sqrt{2}(\cos 156.9016^\circ + i \operatorname{sen} 156.9016^\circ) = \\ & \underline{\underline{-1.30079 + 0.5548i}} \\ k=2, & u_3 = \sqrt{2}_{\frac{110.7048^\circ + 720^\circ}{3}} = \sqrt{2}_{276.9016^\circ} = \sqrt{2}(\cos 276.9016^\circ + i \operatorname{sen} 276.9016^\circ) = \\ & \underline{\underline{0.16993 - 1.40396i}} \end{cases}$$

Para obtener los valores correspondientes a v , despejamos de la ecuación $3uv = -p$, que es una de las ecuaciones del sistema que se utilizó para deducir la fórmula de las soluciones de las ecuaciones cúbicas incompletas como se vio anteriormente: $v = \frac{-p}{3u}$.

Para $u_1 = 1.1309 + 0.84915i$

$$v_1 = \frac{-p}{3u_1} = \frac{-(-6)}{3(1.1309 + 0.84915i)} = \frac{6(1.1309 - 0.84915i)}{3(1.1309 + 0.84915i)(1.1309 - 0.84915i)} =$$

$$= \frac{2(1.1309 - 0.84915i)}{1.1309^2 - 0.84915^2 i^2} = \frac{2(1.1309 - 0.84915i)}{1.1309^2 + 0.84915^2} = \frac{\cancel{2}(1.1309 - 0.84915i)}{\cancel{2}} = \underline{\underline{1.1309 - 0.84915i}}$$

Para $u_2 = -1.30079 + 0.5548i$

$$v_2 = \frac{-p}{3u_2} = \frac{-(-6)}{3(-1.30079 + 0.5548i)} = \frac{6(-1.30079 - 0.5548i)}{3(-1.30079 + 0.5548i)(-1.30079 - 0.5548i)} =$$

$$= \frac{2(-1.30079 - 0.5548i)}{(-1.30079)^2 - 0.5548^2 i^2} = \frac{2(-1.30079 - 0.5548i)}{(-1.30079)^2 + 0.5548^2} = \frac{\cancel{2}(-1.30079 - 0.5548i)}{\cancel{2}} = \underline{\underline{-1.30079 - 0.5548i}}$$

Para $u_3 = 0.16993 - 1.40396i$

$$v_3 = \frac{-p}{3u_3} = \frac{-(-6)}{3(0.16993 - 1.40396i)} = \frac{6(0.16993 + 1.40396i)}{3(0.16993 - 1.40396i)(0.16993 + 1.40396i)} =$$

$$= \frac{2(0.16993 + 1.40396i)}{0.16993^2 - 1.40396^2 i^2} = \frac{2(0.16993 + 1.40396i)}{0.16993^2 + 1.40396^2} = \frac{\cancel{2}(0.16993 + 1.40396i)}{\cancel{2}} = \underline{\underline{0.16993 + 1.40396i}}$$

Entonces las raíces son:

$$x_1 = u_1 + v_1 = 1.1309 + 0.84915i + 1.1309 - 0.84915i = 2 \cdot 1.1309 = \underline{\underline{2.2618}}$$

$$x_2 = u_2 + v_2 = -1.30079 + 0.5548i - 1.30079 - 0.5548i = 2 \cdot (-1.30079) = \underline{\underline{-2.60158}}$$

$$x_3 = u_3 + v_3 = 0.16993 - 1.40396i + 0.16993 + 1.40396i = 2 \cdot 0.16993 = \underline{\underline{0.33986}}$$

Las soluciones de la ecuación $x^3 - 6x + 2 = 0$ son:

$x_1 = 2.2618$ $x_2 = -2.60158$ $x_3 = 0.33986$

Podemos observar que los valores de los v_i son los complejos conjugados de los valores de los u_i . Esto es lógico teniendo en cuenta que las soluciones $u_i + v_i$ han de ser números reales. Entonces en estos casos, las raíces reales de las ecuaciones son el doble de las partes reales de los números complejos resultantes de los u_i .

Resolución de ecuaciones cúbicas completas.

Para resolver la ecuación cúbica completa $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ se hace el cambio de variable

$x = t - \frac{a}{3}$ para reducirla a una cúbica incompleta del tipo $x^3 + px + q = 0$ y ya aplicar la fórmula de Cardano-Tartaglia para hallar las soluciones y luego deshacer el cambio de variable.

Ejemplo 4. Resuelve la ecuación $x^3 + 3x^2 + 2x - 4 = 0$

Para reducirla a una ecuación cúbica incompleta sin término cuadrático, se hace el cambio de variable:

$$x = t - \frac{a}{3}, \quad x = t - \frac{3}{3}, \quad \underline{x = t - 1}$$

$$x^3 + 3x^2 + 2x - 4 = 0 \xrightarrow{x=t-1} (t-1)^3 + 3(t-1)^2 + 2(t-1) - 4 = 0$$

$$t^3 + 3t^2(-1) + 3t(-1)^2 + (-1)^3 + 3(t^2 - 2t + 1) + 2t - 2 - 4 = 0$$

$$t^3 - 3t^2 + 3t - 1 + 3t^2 - 6t + 3 + 2t - 6 = 0, \quad \underline{\underline{t^3 - t - 4 = 0}}$$

Aplicamos la fórmula de Cardano-Tartaglia a la ecuación: $t^3 - t - 4 = 0$

$$p = -1 \quad y \quad q = -4 \quad \rightarrow \quad \Delta = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = \left(\frac{-4}{2}\right)^2 + \left(\frac{-1}{3}\right)^3 = 4 - \frac{1}{27} = \frac{108-1}{27} = \frac{107}{27} \quad \Delta = \frac{107}{27} > 0 \Rightarrow$$

La ecuación tiene una solución real y dos soluciones complejas conjugadas.

$$t = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} + \sqrt{\Delta}} + \sqrt[3]{\frac{-q}{2} - \sqrt{\Delta}} = \sqrt[3]{\frac{4}{2} + \sqrt{\frac{107}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{4}{2} - \sqrt{\frac{107}{27}}} = \sqrt[3]{2 + \sqrt{\frac{107}{27}}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{\frac{107}{27}}} = \underline{\underline{1.7963}}$$

Comprobamos por la regla de Ruffini que es solución de la ecuación:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & -1 & -4 \\ 1.7963 & & 1.7963 & 3.2267 & 4 \\ \hline & 1 & 1.7963 & 2,2267 & \underline{0} \end{array}$$

$$t^2 + 1.7963t + 2,2267 = 0 \rightarrow t = \frac{-1.7963 \pm \sqrt{3.2267 - 8,9068}}{2} = \frac{-1.7963}{2} \pm \frac{\sqrt{-5.6801}}{2} =$$

$$= -0.89815 \pm \frac{\sqrt{5.6801}}{2}i = -0.89815 \pm 1.19165i$$

Deshaciendo el cambio $x = t - 1$, las soluciones de la ecuación $x^3 + 3x^2 + 2x - 4 = 0$ son:

$\begin{aligned} x_1 &= 1.7963 - 1 = \underline{0.7963} \\ x_2 &= -0.89815 + 1.19165i - 1 = \underline{-1.8982 + 1.1917i} \\ x_3 &= -0.89815 - 1.19165i - 1 = \underline{-1.8982 - 1.1917i} \end{aligned}$
--

Ejemplo 5. Resuelve la ecuación $2x^3 - 12x^2 + 5x + 4 = 0$

La ecuación $2x^3 - 12x^2 + 5x + 4 = 0$ es equivalente a $x^3 - 6x^2 + \frac{5}{2}x + 2 = 0$

Para reducirla a una ecuación cúbica incompleta sin término cuadrático, se hace el cambio de variable:

$$x = t - \frac{a}{3}, \quad x = t - \frac{-6}{3}, \quad \underline{x = t + 2}$$

$$x^3 - 6x^2 + \frac{5}{2}x + 2 = 0 \xrightarrow{x=t+2} (t+2)^3 - 6(t+2)^2 + \frac{5}{2}(t+2) + 2 = 0$$

$$t^3 + 3t^2 \cdot 2 + 3t \cdot 2^2 + 2^3 - 6(t^2 + 4t + 4) + \frac{5}{2}t + 5 + 2 = 0$$

$$t^3 + \cancel{6t^2} + 12t + 8 - \cancel{6t^2} - 24t - 24 + \frac{5}{2}t + 7 = 0, \quad \underline{\underline{t^3 - \frac{19}{2}t - 9 = 0}}$$

Aplicamos la fórmula de Cardano-Tartaglia a la ecuación: $t^3 - \frac{19}{2}t - 9 = 0$

$$p = \frac{-19}{2} \quad y \quad q = -9 \rightarrow \Delta = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = \left(\frac{-9}{2}\right)^2 + \left(\frac{-19}{2}\right)^3 = \frac{81}{4} - \frac{6859}{216} = \frac{4374 - 6859}{216} = \frac{-2485}{216}$$

$\Delta = \frac{-2485}{216} < 0 \Rightarrow$ La ecuación tiene tres soluciones reales distintas.

Aplicando la fórmula de Cardano-Tartaglia:

$$x = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} + \sqrt{\Delta}} + \sqrt[3]{\frac{-q}{2} - \sqrt{\Delta}} = \sqrt[3]{\frac{9}{2} + \sqrt{\frac{-2485}{216}}} + \sqrt[3]{\frac{9}{2} - \sqrt{\frac{-2485}{216}}} = \sqrt[3]{\frac{9}{2} + \sqrt{\frac{2485}{216}}} i + \sqrt[3]{\frac{9}{2} - \sqrt{\frac{2485}{216}}} i$$

Para hallar $\sqrt[3]{\frac{9}{2} + \sqrt{\frac{2485}{216}}} i$, pasamos el número complejo a forma polar:

$$\text{Módulo: } r = \sqrt{\left(\frac{9}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{2485}{216}}\right)^2} = \sqrt{\frac{81}{4} + \frac{2485}{216}} = \sqrt{\frac{6859}{216}}$$

$$\text{Argumento: } \alpha = \text{arc tg} \left(\frac{\sqrt{\frac{2485}{216}}}{\frac{9}{2}} \right) = \text{arc tg} \left(\sqrt{\frac{2485}{4374}} \right) = 37.0069^\circ$$

$$\frac{9}{2} + \sqrt{\frac{2485}{216}} i = \sqrt{\frac{6859}{216}} \angle_{37.0069^\circ}$$

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{\frac{9}{2} + \sqrt{\frac{2485}{216}}} i &= \sqrt[3]{\sqrt{\frac{6859}{216}} \angle_{37.0069^\circ}} = \left(\sqrt[3]{\sqrt{\frac{6859}{216}}} \right) \angle_{\frac{37.0069^\circ + k360^\circ}{3}} = \sqrt[3]{\sqrt{\frac{6859}{216}}} \angle_{\frac{37.0069^\circ + k360^\circ}{3}} \\ &= \sqrt{\frac{19}{6}} \angle_{\frac{37.0069^\circ + k360^\circ}{3}} \end{aligned}$$

$$= \begin{cases} k=0, & u_1 = \sqrt{\frac{19}{6}} \angle_{\frac{37.0069^\circ}{3}} = \sqrt{\frac{19}{6}} \angle_{12.3356^\circ} = \sqrt{\frac{19}{6}} (\cos 12.3356^\circ + i \text{sen} 12.3356^\circ) = \\ & \underline{\underline{1.7384 + 0.3802i}} \\ k=1, & u_2 = \sqrt{\frac{19}{6}} \angle_{\frac{37.0069^\circ + 360^\circ}{3}} = \sqrt{\frac{19}{6}} \angle_{132.3356^\circ} = \sqrt{\frac{19}{6}} (\cos 132.3356^\circ + i \text{sen} 132.3356^\circ) = \\ & \underline{\underline{-1.1984 + 1.3154i}} \\ k=2, & u_3 = \sqrt{\frac{19}{6}} \angle_{\frac{37.0069^\circ + 720^\circ}{3}} = \sqrt{\frac{19}{6}} \angle_{252.3356^\circ} = \sqrt{\frac{19}{6}} (\cos 252.3356^\circ + i \text{sen} 252.3356^\circ) = \\ & \underline{\underline{-0.54 - 1.6956i}} \end{cases}$$

Para obtener los valores correspondientes a v , utilizamos la igualdad: $v = \frac{-p}{3u}$.

Para $u_1 = 1.7384 + 0.3802i$

$$\begin{aligned}v_1 &= \frac{-p}{3u_1} = \frac{-\left(\frac{-19}{2}\right)}{3(1.7384 + 0.3802i)} = \frac{19(1.7384 - 0.3802i)}{6(1.7384 + 0.3802i)(1.7384 - 0.3802i)} = \\&= \frac{19(1.7384 - 0.3802i)}{6(1.7384^2 - 0.3802^2 i^2)} = \frac{19(1.7384 - 0.3802i)}{6(1.7384^2 + 0.3802^2)} = \frac{\cancel{19}(1.7384 - 0.3802i)}{\cancel{19}} = \underline{\underline{1.7384 - 0.3802i}}\end{aligned}$$

Para $u_2 = -1.1984 + 1.3154i$

$$\begin{aligned}v_2 &= \frac{-p}{3u_2} = \frac{-\left(\frac{-19}{2}\right)}{3(-1.1984 + 1.3154i)} = \frac{19(-1.1984 - 1.3154i)}{6(-1.1984 + 1.3154i)(-1.1984 - 1.3154i)} = \\&= \frac{19(-1.1984 - 1.3154i)}{6((-1.1984)^2 - 1.3154^2 i^2)} = \frac{19(-1.1984 - 1.3154i)}{6((-1.1984)^2 + 1.3154^2)} = \frac{\cancel{19}(-1.1984 - 1.3154i)}{\cancel{19}} = \underline{\underline{-1.1984 - 1.3154i}}\end{aligned}$$

Para $u_3 = -0.54 - 1.6956i$

$$\begin{aligned}v_3 &= \frac{-p}{3u_3} = \frac{-\left(\frac{-19}{2}\right)}{3(-0.54 - 1.6956i)} = \frac{19(-0.54 + 1.6956i)}{6(-0.54 - 1.6956i)(-0.54 + 1.6956i)} = \\&= \frac{19(-0.54 + 1.6956i)}{6((-0.54)^2 - 1.6956^2 i^2)} = \frac{19(-0.54 + 1.6956i)}{6((-0.54)^2 + 1.6956^2)} = \frac{\cancel{19}(-0.54 + 1.6956i)}{\cancel{19}} = \underline{\underline{-0.54 + 1.6956i}}\end{aligned}$$

Entonces las raíces son:

$$t_1 = u_1 + v_1 = 1.7384 + 0.3802i + 1.7384 - 0.3802i = 2 \cdot 1.7384 = \underline{3.4768}$$

$$t_2 = u_2 + v_2 = -1.1984 + 1.3154i - 1.1984 - 1.3154i = 2 \cdot (-1.1984) = \underline{-2.3968}$$

$$t_3 = u_3 + v_3 = -0.54 - 1.6956i - 0.54 + 1.6956i = 2 \cdot (-0.54) = \underline{-1.08}$$

Deshaciendo el cambio $x = t + 2$, las soluciones de la ecuación $2x^3 - 12x^2 + 5x + 4 = 0$ son:

$x_1 = 3.4768 + 2 = \underline{5.4768}$
$x_2 = -2.3968 + 2 = \underline{-0.3968}$
$x_3 = -1.08 + 2 = \underline{0.92}$

2. Resolución de ecuaciones de grado cuatro. Fórmula de Ferrari.

En 1540, **Ludovico Ferrari**, con el apoyo de su mentor Cardano, encuentra un método para resolver ecuaciones de grado cuatro. El método requiere resolver una cúbica por lo que Cardano publica la resolución de las cúbicas y cuárticas en su libro *Ars Magna*.

Toda ecuación polinómica de grado cuatro se puede escribir de la forma:

$$x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$$

Vamos a reducir la ecuación cuártica en una ecuación de grado cuatro donde no aparezca el término de grado 3. Para ello se hace el cambio de variable $x = y - \frac{p}{4}$.

Partiendo de la ecuación genérica reducida de grado cuatro:

$$x^4 + bx^2 + cx + d = 0$$

vamos a tratar de expresar esta ecuación como diferencia de dos cuadrados para después aplicar la identidad notable: $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$.

Así pues, se propone escribir la ecuación como:

$$x^4 + bx^2 + cx + d = (x^2 + A)^2 - (Bx + C)^2$$

Se desarrolla el segundo miembro:

$$\begin{aligned} (x^2 + A)^2 - (Bx + C)^2 &= x^4 + 2Ax^2 + A^2 - B^2x^2 - 2BCx - C^2 = \\ &= x^4 + (2A - B^2)x^2 - 2BCx + A^2 - C^2 \end{aligned}$$

Y se identifican coeficientes:

$$x^4 + bx^2 + cx + d = x^4 + (2A - B^2)x^2 - 2BCx + A^2 - C^2 \quad \begin{cases} b = 2A - B^2 & B^2 = 2A - b \\ c = -2BC & \Rightarrow BC = \frac{-1}{2}c \\ d = A^2 - C^2 & C^2 = A^2 - d \end{cases}$$

Como $(BC)^2 = B^2C^2$ resulta: $\left(\frac{-1}{2}c\right)^2 = (2A - b) \cdot (A^2 - d)$

Desarrollando queda la ecuación cúbica en A siguiente:

$$\frac{c^2}{4} = 2A^3 - 2dA - bA^2 + bd \rightarrow \underline{2A^3 - bA^2 - 2dA + bd - \frac{c^2}{4} = 0}$$

Resolviendo la ecuación cúbica anterior se tiene un valor de A y a partir de él se determinan los valores de B y C.

Con lo que la ecuación cuártica se puede expresar como:

$$(x^2 + A)^2 - (Bx + C)^2 = ((x^2 + A) + (Bx + C)) \cdot ((x^2 + A) - (Bx + C)) = 0$$

Con lo cual resolver la ecuación de cuarto grado equivale a resolver dos ecuaciones de grado dos:

$$\begin{aligned} x^4 + bx^2 + cx + d = 0 &\Leftrightarrow ((x^2 + A) + (Bx + C)) \cdot ((x^2 + A) - (Bx + C)) = 0 \\ &\begin{cases} x^2 + Bx + A + C = 0 \\ x^2 - Bx + A - C = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Ejemplo 6. Resuelve la ecuación $x^4 - 4x^3 - 4x^2 + 20x - 5 = 0$

Para obtener una ecuación equivalente a la dada sin término de grado tres, se efectúa el cambio de variable:

$$x = y - \frac{-4}{4}, \quad x = y + 1.$$

$$(y+1)^4 - 4(y+1)^3 - 4(y+1)^2 + 20(y+1) - 5 = 0$$

$$(y^2 + 2y + 1) \cdot (y^2 + 2y + 1) - 4(y^3 + 3y^2 + 3y + 1) - 4(y^2 + 2y + 1) + 20y + 20 - 5 = 0$$

$$y^4 + \cancel{2y^3} + y^2 + \cancel{2y^3} + 4y^2 + 2y + y^2 + 2y + 1 - \cancel{4y^3} - 12y^2 - 12y - 4 - 4y^2 - 8y - 4 + 20y + 20 - 5 = 0$$

$$\underline{y^4 - 10y^2 + 4y + 8 = 0}$$

Se propone escribir la ecuación como:

$$y^4 - 10y^2 + 4y + 8 = (y^2 + A)^2 - (By + C)^2$$

Se desarrolla y se identifican coeficientes:

$$y^4 - 10y^2 + 4y + 8 = (y^2 + A)^2 - (By + C)^2$$

$$(y^2 + A)^2 - (By + C)^2 = y^4 + 2Ay^2 + A^2 - B^2y^2 - 2BCy - C^2 =$$

$$= y^4 + (2A - B^2)y^2 - 2BCy + A^2 - C^2$$

$$y^4 - 10y^2 + 4y + 8 = y^4 + (2A - B^2)y^2 - 2BCy + A^2 - C^2$$

$$\begin{cases} -10 = 2A - B^2 & B^2 = 2A + 10 \\ 4 = -2BC & \Rightarrow BC = -2 \\ 8 = A^2 - C^2 & C^2 = A^2 - 8 \end{cases}$$

Como $(BC)^2 = B^2C^2$ resulta: $(-2)^2 = (2A + 10) \cdot (A^2 - 8)$

$$4 = 2A^3 - 16A + 10A^2 - 80$$

$$2A^3 - 16A + 10A^2 - 80 - 4 = 0, \quad \underline{A^3 + 5A^2 - 8A - 42 = 0}$$

Aplicando la regla de Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 5 & -8 & -42 \\ -3 & & -3 & -6 & 42 \\ \hline & 1 & 2 & -14 & \underline{0} \end{array}$$

Encontramos que una raíz de la cúbica es: $A = -3$

$$C^2 = A^2 - 8, \quad C^2 = (-3)^2 - 8, \quad C^2 = 1, \quad C = \pm\sqrt{1} = \pm 1, \quad \text{tomamos como valor: } \underline{C = 1}$$

$$BC = -2, \quad B \cdot 1 = -2, \quad \underline{B = -2}$$

$$y^4 - 10y^2 + 4y + 8 = (y^2 - 3)^2 - (-2y + 1)^2 = ((y^2 - 3) + (-2y + 1)) \cdot ((y^2 - 3) - (-2y + 1)) =$$

$$= (y^2 - 2y - 2) \cdot (y^2 + 2y - 4)$$

$$y^4 - 10y^2 + 4y + 8 = 0 \Leftrightarrow (y^2 - 2y - 2) \cdot (y^2 + 2y - 4) = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y^2 - 2y - 2 = 0, \quad y = \frac{2 \pm \sqrt{4+8}}{2} \left\{ \begin{array}{l} y_1 = \frac{2 + \sqrt{12}}{2} = \frac{2 + 2\sqrt{3}}{2} = 1 + \sqrt{3} \\ y_2 = \frac{2 - \sqrt{12}}{2} = \frac{2 - 2\sqrt{3}}{2} = 1 - \sqrt{3} \end{array} \right. \\ y^2 + 2y - 4 = 0, \quad y = \frac{-2 \pm \sqrt{4+16}}{2} \left\{ \begin{array}{l} y_3 = \frac{-2 + \sqrt{20}}{2} = \frac{-2 + 2\sqrt{5}}{2} = -1 + \sqrt{5} \\ y_4 = \frac{-2 - \sqrt{20}}{2} = \frac{-2 - 2\sqrt{5}}{2} = -1 - \sqrt{5} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Deshaciendo el cambio de variable $x = y + 1$, las raíces de la ecuación son:

$$x_1 = y_1 + 1 = 1 + \sqrt{3} + 1, \quad \boxed{x_1 = 2 + \sqrt{3}}$$

$$x_2 = y_2 + 1 = 1 - \sqrt{3} + 1, \quad \boxed{x_2 = 2 - \sqrt{3}}$$

$$x_3 = y_3 + 1 = -1 + \sqrt{5} + 1, \quad \boxed{x_3 = \sqrt{5}}$$

$$x_4 = y_4 + 1 = -1 - \sqrt{5} + 1, \quad \boxed{x_4 = -\sqrt{5}}$$

Ejemplo 7. Resuelve la ecuación $x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 4x - 10 = 0$

Se hace el cambio de variable: $x = y - \frac{-2}{4}$, $x = y + \frac{1}{2}$.

$$\left(y + \frac{1}{2}\right)^4 - 2\left(y + \frac{1}{2}\right)^3 + 3\left(y + \frac{1}{2}\right)^2 + 4\left(y + \frac{1}{2}\right) - 10 = 0$$

$$\left(y^2 + y + \frac{1}{4}\right) \cdot \left(y^2 + y + \frac{1}{4}\right) - 2\left(y^3 + \frac{3}{2}y^2 + \frac{3}{4}y + \frac{1}{8}\right) + 3\left(y^2 + y + \frac{1}{4}\right) + 4y + 2 - 10 = 0$$

$$y^4 + y^3 + \frac{1}{4}y^2 + y^3 + y^2 + \frac{1}{4}y + \frac{1}{4}y^2 + \frac{1}{4}y + \frac{1}{16} - 2y^3 - \frac{3}{2}y^2 - \frac{3}{4}y - \frac{1}{4} + 3y^2 + 3y + \frac{3}{4} + 4y - 8 = 0$$

$$\underline{y^4 + \frac{3}{2}y^2 + 6y - \frac{119}{16} = 0}$$

Se propone escribir la ecuación como:

$$y^4 + \frac{3}{2}y^2 + 6y - \frac{119}{16} = (y^2 + A)^2 - (By + C)^2$$

Se desarrolla y se identifican coeficientes:

$$y^4 + \frac{3}{2}y^2 + 6y - \frac{119}{16} = (y^2 + A)^2 - (By + C)^2$$

$$(y^2 + A)^2 - (By + C)^2 = y^4 + 2Ay^2 + A^2 - B^2y^2 - 2BCy - C^2 =$$

$$= y^4 + (2A - B^2)y^2 - 2BCy + A^2 - C^2$$

$$y^4 + \frac{3}{2}y^2 + 6y - \frac{119}{16} = y^4 + (2A - B^2)y^2 - 2BCy + A^2 - C^2$$

$$\begin{cases} \frac{3}{2} = 2A - B^2 & B^2 = 2A - \frac{3}{2} \\ 6 = -2BC & \Rightarrow BC = -3 \\ \frac{-119}{16} = A^2 - C^2 & C^2 = A^2 + \frac{119}{16} \end{cases}$$

Como $(BC)^2 = B^2C^2$ resulta: $(-3)^2 = \left(2A - \frac{3}{2}\right) \cdot \left(A^2 + \frac{119}{16}\right)$

$$9 = 2A^3 + \frac{119}{8}A - \frac{3}{2}A^2 - \frac{357}{32} \rightarrow 2A^3 - \frac{3}{2}A^2 + \frac{119}{8}A - \frac{645}{32} = 0 \rightarrow \underline{64A^3 - 48A^2 + 476A - 645 = 0}$$

Aplicando la regla de Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 64 & -48 & 476 & -645 \\ \frac{5}{4} & & 80 & 40 & 645 \\ \hline & 64 & 32 & 516 & \underline{0} \end{array}$$

Encontramos que una raíz de la cúbica es: $A = \underline{\underline{\frac{5}{4}}}$

$$C^2 = A^2 + \frac{119}{16}, C^2 = \left(\frac{5}{4}\right)^2 + \frac{119}{16}, C = \pm\sqrt{\frac{144}{16}} = \pm\sqrt{9} = \pm 3, \text{ tomamos como valor: } \underline{\underline{C=3}}$$

$$BC = -3, B \cdot 3 = -3, \underline{\underline{B=-1}}$$

$$y^4 + \frac{3}{2}y^2 + 6y - \frac{119}{16} = \left(y^2 + \frac{5}{4}\right)^2 - (-y+3)^2$$

$$y^4 + \frac{3}{2}y^2 + 6y - \frac{119}{16} = \left(y^2 + \frac{5}{4}\right)^2 - (-y+3)^2 = \left(y^2 + \frac{5}{4} - y + 3\right) \cdot \left(y^2 + \frac{5}{4} + y - 3\right) = \left(y^2 - y + \frac{17}{4}\right) \cdot \left(y^2 + y - \frac{7}{4}\right)$$

$$y^4 + \frac{3}{2}y^2 + 6y - \frac{119}{16} = 0 \Leftrightarrow \left(y^2 - y + \frac{17}{4}\right) \cdot \left(y^2 + y - \frac{7}{4}\right) = 0$$

$$\begin{cases} y^2 - y + \frac{17}{4} = 0, & y = \frac{1 \pm \sqrt{1-17}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{1 \pm 4i}{2} = \begin{cases} y_1 = \frac{1}{2} + 2i \\ y_2 = \frac{1}{2} - 2i \end{cases} \\ y^2 + y - \frac{7}{4} = 0, & y = \frac{-1 \pm \sqrt{1+7}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{-1 \pm 2\sqrt{2}}{2} = \begin{cases} y_3 = \frac{-1}{2} + \sqrt{2} \\ y_4 = \frac{-1}{2} - \sqrt{2} \end{cases} \end{cases}$$

Deshaciendo el cambio de variable $x = y + \frac{1}{2}$, las raíces de la ecuación son:

$$x_1 = y_1 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + 2i + \frac{1}{2}, \quad \boxed{x_1 = 1 + 2i}$$

$$x_2 = y_2 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - 2i + \frac{1}{2}, \quad \boxed{x_2 = 1 - 2i}$$

$$x_3 = y_3 + \frac{1}{2} = \frac{-1}{2} + \sqrt{2} + \frac{1}{2}, \quad \boxed{x_3 = \sqrt{2}}$$

$$x_4 = y_4 + \frac{1}{2} = \frac{-1}{2} - \sqrt{2} + \frac{1}{2}, \quad \boxed{x_4 = -\sqrt{2}}$$

Ejemplo 8. Resuelve la ecuación $x^4 - 12x^3 + 55x^2 - 114x + 78 = 0$

Para obtener una ecuación equivalente a la dada sin término de grado tres, se efectúa el cambio de variable:

$$x = y - \frac{-12}{4}, \quad x = y + 3.$$

$$(y+3)^4 - 12(y+3)^3 + 55(y+3)^2 - 114(y+3) + 78 = 0$$

$$(y^2 + 6y + 9) \cdot (y^2 + 6y + 9) - 12(y^3 + 9y^2 + 27y + 27) + 55(y^2 + 6y + 9) - 114y - 342 + 78 = 0$$

$$y^4 + \cancel{6y^3} + 9y^2 + \cancel{6y^3} + 36y^2 + 54y + 9y^2 + 54y + 81 - \cancel{12y^3} - 108y^2 - 324y - 324 +$$

$$+ 55y^2 + 330y + 495 - 114y - 342 + 78 = 0$$

$$\underline{y^4 + y^2 - 12 = 0}$$

En este caso, la ecuación cuártica se ha convertido en una bicuadrada.

$$y^2 = \frac{-1 \pm \sqrt{1+48}}{2} = \frac{-1 \pm 7}{2} \left\{ \begin{array}{l} y^2 = 3, \quad y = \pm\sqrt{3} \left\{ \begin{array}{l} y_1 = \sqrt{3} \\ y_2 = -\sqrt{3} \end{array} \right. \\ y^2 = -4, \quad y = \pm\sqrt{-4} = \pm 2i \left\{ \begin{array}{l} y_3 = 2i \\ y_4 = -2i \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Deshaciendo el cambio de variable $x = y + 3$, las raíces de la ecuación son:

$$x_1 = y_1 + 3 = \sqrt{3} + 3, \quad \boxed{x_1 = 3 + \sqrt{3}}$$

$$x_2 = y_2 + 3 = -\sqrt{3} + 3, \quad \boxed{x_2 = 3 - \sqrt{3}}$$

$$x_3 = y_3 + 3 = 2i + 3, \quad \boxed{x_3 = 3 + 2i}$$

$$x_4 = y_4 + 3 = -2i + 3, \quad \boxed{x_4 = 3 - 2i}$$

3. Ecuaciones de grado superior a cuatro.

En el siglo XIX el joven matemático noruego **Niels Abel** demostró la imposibilidad de obtener una fórmula general que mediante radicales solucionen las ecuaciones algebraicas de grado superior a cuatro.

A principios de ese siglo París era el epicentro de las matemáticas occidentales. El pobre Abel crece entre penurias en la lejana Oslo sin conseguir casi reconocimiento pese a sus asombrosos avances. Se las arregla para visitar París durante seis meses, pero el azar (se pierde el trabajo más importante que presenta a la Academia de Ciencias) y su modestia impiden que se le valore como merece. Cargado de deudas se ve obligado a volver a su país y tratar de hacerse cargo de la desesperada situación de su madre y hermanos.

Por fin, en 1830, la Academia reconoce su enorme mérito y le otorga el Gran Premio de las Matemáticas. Desgraciadamente, esto ocurre un año después de su muerte, víctima de la tuberculosis con solo 26 años.



En el año 2002, bicentenario de su nacimiento, el gobierno noruego creó el **Premio Abel** en su honor. Lo entrega anualmente el rey y tiene una cuantía económica similar al Nobel. Dado que no existe Premio Nobel de Matemáticas, este premio tiene un prestigio similar.

Para grados superiores o iguales a cinco, el teorema de Abel especifica que no puede resolverse por radicales cualquier ecuación pero hay ecuaciones particulares que sí pueden resolverse por radicales. Por ejemplo, la ecuación $x^5 - x + 1 = 0$ no puede resolverse mediante radicales, sin embargo, algunas otras ecuaciones de quinto grado pueden ser resueltas mediante radicales, por ejemplo $x^5 - x^4 - x + 1 = 0$.

El criterio preciso que separa aquellas ecuaciones que pueden ser resueltas mediante radicales de aquellas que no, fue dado por un contemporáneo de Abel, Évariste Galois, y es parte de la Teoría de Galois: una ecuación polinómica puede ser resuelta mediante radicales si y solo si su grupo de Galois es un grupo resoluble. Su enfoque revolucionario para abordar la resolución de ecuaciones de cualquier grado se apoya en unas estructuras abstractas, *los grupos*.

Évariste Galois fue otro genio incomprendido. Imbuido por los ideales de la Revolución Francesa, crece en un París efervescente en el que ha de sobrevivir al suicidio de su padre (objeto de calumnias infundadas) y al rechazo a poder matricularse en la Escuela Politécnica.



Con sólo 20 años acepta un duelo a pistola. Ni siquiera sabe disparar, pero su honor le impide rehusar. La noche de antes, consciente de que son sus últimas horas, se afana a la luz de una vela escribiendo a toda prisa sus descubrimientos. Intercalados entre ellos, su célebre “je n’ai pas le temps” (no tengo tiempo). Si se considera la originalidad y la profundidad de las ideas que contiene, es uno de los documentos más valiosos de la historia. A la mañana siguiente, una bala le perfora los intestinos causándole la muerte. ¿Qué hubiera sido capaz de conseguir si hubiera vivido tanto como Arquímedes (75 años), Gauss (77) o Newton (84)?

La imposibilidad de una solución de quinto o mayor orden contrasta con la situación de menor orden, hemos visto en apartados anteriores que tenemos para ecuaciones cuadráticas, cúbicas y cuárticas, fórmulas con radicales que las resuelven de forma general.

El teorema de Abel no afirma que las ecuaciones polinómicas de grado cinco o superior no tengan soluciones o que no puedan ser resueltas. De hecho, si la ecuación polinómica tiene

coeficientes reales o complejos y permitimos soluciones complejas, entonces cualquier ecuación polinómica tiene soluciones; éste es el Teorema Fundamental del Álgebra. Aunque estas soluciones no siempre pueden ser calculadas exactamente con un número finito de operaciones aritméticas, pueden serlo hasta cualquier grado de exactitud deseado usando **métodos numéricos** tales como el **método de Newton-Raphson** o el **Método de la secante**, y de ese modo no son diferentes de las soluciones de las ecuaciones polinómicas de segundo, tercero y cuarto grado.

4. Resolución de ecuaciones de grado cinco o más.

Para resolver ecuaciones polinómicas de grado superior a cuatro se utilizan los métodos numéricos recursivos, construyendo unas sucesiones de valores convergentes a cada una de las soluciones de la ecuación.

Antes veamos los siguientes teoremas que vamos a necesitar.

Teorema de Bolzano

Si f es una función continua en el intervalo cerrado $[a,b]$ y $f(a) \cdot f(b) < 0$ entonces existe un punto $c \in (a,b)$ en el cual $f(c) = 0$.

La cuestión es localizar las raíces en subintervalos de $[a,b]$. Para ver que la raíz $x_1 \in [a_1, b_1] \subset [a,b]$ es única se puede garantizar viendo que $f'(x) \neq 0$ en todo el intervalo $[a_1, b_1]$ según el teorema de Rolle.

Teorema de Rolle

Si f es una función continua en el intervalo cerrado $[a,b]$, derivable en (a,b) y $f(a) = f(b)$ entonces existe un punto $c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = 0$.

Naturaleza de las raíces de una ecuación polinómica. Regla de los signos de Descartes.

El número de raíces reales positivas de una ecuación polinómica con coeficientes reales igualada a cero es, como mucho, igual al número de cambios de signo que se producen entre sus coeficientes.

Y además, si el número mayor posible no se alcanza, el número de raíces positivas de la ecuación difiere de ella en un múltiplo de 2.

Para determinar el posible número de raíces negativas se puede obtener aplicando la anterior regla a la ecuación que resulta de hacer el cambio de variable $x \leftrightarrow -x$

Por el teorema fundamental del álgebra sabemos que el número de raíces en \mathbb{C} de una ecuación polinómica coincide con el grado del polinomio y que si $a+bi$ es una raíz compleja del polinomio, su conjugada $a-bi$ también es raíz de dicho polinomio, o sea, que el número de las raíces complejas es un múltiplo de 2. Con todo esto se hace una tabla de la posible naturaleza de las raíces de un polinomio:

Posibilidades	Raíces			
	$\mathbb{R}+$	$\mathbb{R}-$	\mathbb{C}	Totales
P1				
P2				
...				

Ejemplo 9. Estudia la naturaleza de las raíces de las ecuaciones:

a) $x^4 - 2x^3 + 6x - 9 = 0$.

b) $6x^5 - 12x^4 + 7x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$.

a) $x^4 - 2x^3 + 6x - 9 = 0$

Ordenada la ecuación de mayor a menor grado, tomamos los coeficientes:

$P(x) = x^4 - 2x^3 + 6x - 9 = 0$ $1 \quad -2 \quad +0 \quad 6 \quad -9$ $\quad \leftarrow \overset{1}{\rightarrow} \leftarrow \overset{1}{\rightarrow} \quad \leftarrow \overset{1}{\rightarrow}$ <p>Hay 3 cambios de signo, por tanto, hay 3 o 1 raíces reales positivas.</p>	$P(-x) = (-x)^4 - 2(-x)^3 + 6(-x) - 9 = x^4 + 2x^3 - 6x - 9 = 0$ $1 \quad 2 \quad +0 \quad -6 \quad -9$ $\quad \quad \quad \quad \quad \leftarrow \overset{1}{\rightarrow}$ <p>Hay 1 cambio de signo, por tanto, hay 1 raíz real negativa.</p>
---	---

Posibilidades	Raíces			
	$\mathbb{R} +$	$\mathbb{R} -$	\mathbb{C}	Totales
P1	3	1	0	4
P2	1	1	2	4

b) $6x^5 - 12x^4 + 7x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$

$P(x) = 6x^5 - 12x^4 + 7x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$ $6 \quad -12 \quad 7 \quad -1 \quad -2 \quad 1$ $\quad \leftarrow \overset{1}{\rightarrow} \leftarrow \overset{1}{\rightarrow} \leftarrow \overset{1}{\rightarrow} \quad \leftarrow \overset{1}{\rightarrow}$ <p>Hay 4 cambios de signo, por tanto, hay 4, 2 o 0 raíces reales positivas.</p>	$P(-x) = 6(-x)^5 - 12(-x)^4 + 7(-x)^3 - (-x)^2 - 2(-x) + 1 =$ $= -6x^5 - 12x^4 - 7x^3 - x^2 + 2x + 1 = 0$ $-6 \quad -12 \quad -7 \quad -1 \quad 2 \quad 1$ $\quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \leftarrow \overset{1}{\rightarrow}$ <p>Hay 1 cambio de signo, por tanto, hay 1 raíz real negativa.</p>
--	--

Posibilidades	Raíces			
	$\mathbb{R} +$	$\mathbb{R} -$	\mathbb{C}	Totales
P1	4	1	0	5
P2	2	1	2	5
P3	0	1	4	5

Acotación de las raíces de una ecuación polinómica

- Si s es una raíz de la ecuación $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$ entonces se verifica que

$$|s| < 1 + \frac{A}{|a_n|} \quad \text{siendo} \quad A = \max\{|a_n|, |a_{n-1}|, \dots, |a_1|, |a_0|\}$$

Este resultado nos da una primera acotación de los valores de las raíces de la ecuación. Si esta acotación no es muy buena se puede aplicar la siguiente regla para mejorar la acotación de las raíces.

- Teorema de cotas o regla de Laguerre:

Sea la ecuación $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$, con $a_n > 0$ y sean

$C(x) = b_{n-1} x^{n-1} + b_{n-2} x^{n-2} + \dots + b_1 x + b_0$ el cociente y R el resto de la división de $P(x)$ entre $x - c$.

- Si $c > 0$, $R \geq 0$ y $b_i \geq 0$ para $0 \leq i \leq n-1$, el número real c es una cota superior para las raíces de la ecuación.

- Si $c < 0$, b_i para $0 \leq i \leq n-1$ y R van alternando los signos entonces el número real c es una cota inferior para las raíces de la ecuación.

Ejemplo 10. Acotar los valores de las raíces de la ecuación: $2x^4 - 9x^3 - x^2 + 24x + 12 = 0$.

Sabemos que $|s| < 1 + \frac{A}{|a_n|}$ con $A = \max \{|a_i|\} \Rightarrow |s| < 1 + \frac{24}{2} = 13$

Por tanto, cualquier raíz real del polinomio debe estar en el intervalo: $(-13, 13)$, $s \in (-13, 13)$

Como la acotación no es muy buena podemos aplicar la regla de Laguerre:

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 2 & -9 & -1 & 24 & 12 \\ 4 & & 8 & -4 & & \\ \hline & 2 & -1 & -5 & & \end{array}$$

Como para $c=4$ se obtiene valores negativos consecutivos en el cociente, no se puede garantizar que $c=4$ sea una cota superior de las raíces.

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 2 & -9 & -1 & 24 & 12 \\ 5 & & 10 & 5 & 20 & 220 \\ \hline & 2 & 1 & 4 & 44 & 232 \end{array}$$

Como todos los valores del cociente y resto son positivos se puede garantizar que una cota superior de las raíces es $c=5$.

No se ha de confundir que la regla de Laguerre no nos garantice que 4 sea una cota superior de las raíces y 5 sí lo sea, con que la ecuación tenga una raíz en el intervalo $]4,5[$. O sea, 4 puede ser una cota superior para las raíces aunque la regla de Laguerre no lo garantice. De hecho lo es, pues la mayor de las raíces positivas es $x=3.561552\dots < 4$.

Tanteamos ahora una posible cota inferior por la regla de Laguerre:

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 2 & -9 & -1 & 24 & 12 \\ -1 & & -2 & 11 & -10 & \\ \hline & 2 & -11 & 10 & 14 & \end{array}$$

Como para $c=-1$ no se obtiene signos alternativos del cociente, no se puede garantizar que $c=-1$ sea una cota inferior de las raíces.

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 2 & -9 & -1 & 24 & 12 \\ -2 & & -4 & 26 & -50 & 52 \\ \hline & 2 & -13 & 25 & -26 & 64 \end{array}$$

Como todos los valores del cociente y resto van alternando sus signos se puede garantizar que una cota inferior de las raíces es $c=-2$.

Por tanto, las raíces de la ecuación están en el intervalo $]-2,5[$.

5. Resolución numérica de ecuaciones. Método de Newton-Raphson.

Los métodos de resolución numérica son métodos iterativos, es decir, procedimientos que generan una sucesión, $\{x_n\}$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = s$ donde s es alguna solución de la ecuación.

A la hora de aplicar un método de resolución numérica es importante tener en cuenta los siguientes aspectos:

Existencia y unicidad de solución.

La existencia de solución queda garantizada en la mayoría de los casos por el teorema de Bolzano que nos permite, además, determinar un intervalo en el que hay al menos una solución de la ecuación $f(x)=0$.

El siguiente resultado, basado en el teorema de Rolle, nos ofrece un método útil para ver si la solución es única en el intervalo $[a,b]$:

“ Si $f : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ es continua en $[a,b]$, $f(a) \cdot f(b) < 0$ y f es derivable en (a,b) con $f'(x) \neq 0, \forall x \in (a,b)$ entonces existe un único $c \in (a,b)$ tal que $f(c)=0$.”

Convergencia del método.

Al aplicar un método numérico obtenemos una sucesión de valores $\{x_n\}$ que van siendo cada vez mejores aproximaciones de la solución. Diremos que el método es convergente si $\{x_n\} \rightarrow s$, siendo s la solución de la ecuación $f(x)=0$.

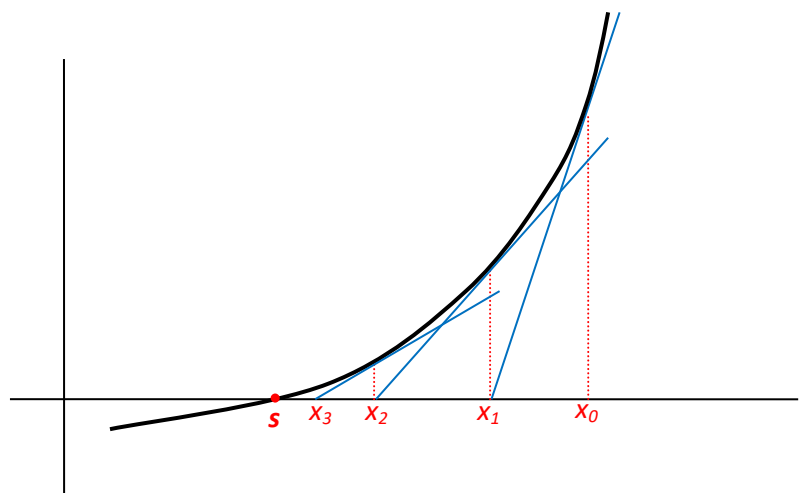
Orden de convergencia.

Los métodos que más interesan son aquellos que requieran un menor número de iteraciones para proporcionarnos un valor aproximado de la solución exacta con la precisión deseada, es decir, aquellos que tengan un orden de convergencia más alto.

Método de Newton-Raphson.

El método de Newton-Raphson es sin duda el método más conocido y utilizado para resolver de forma aproximada una ecuación del tipo $f(x) = 0$. Para poder aplicar este método es necesario que la función sea continua en el intervalo $[a,b]$ y que $f'(x) \neq 0 \forall x \in [a,b]$.

Se parte de un punto $x_0 \in [a,b]$, elegido convenientemente (generalmente x_0 se tomará próximo a la solución buscada) y se calcula la recta tangente a la gráfica $y = f(x)$ en el punto $(x_0, f(x_0))$ cuya ecuación vendrá dada por $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.



Haciendo $y = 0$ en la ecuación anterior y despejando el valor de x se obtiene el punto

$x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$ en el que la recta tangente corta al eje OX.

Tomamos dicho punto como primera aproximación, es decir:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

El procedimiento se repite ahora, considerando la recta tangente en el punto $(x_1, f(x_1))$ y se

obtiene el punto $x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$.

Reiterando el proceso se obtiene una sucesión de puntos $\{x_n\}$ dada por

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Para asegurar la convergencia de esta sucesión, será necesario hacer una elección adecuada del punto inicial x_0 que dependerá de las condiciones que satisfaga la función f en el intervalo $[a, b]$. En algunos casos x_0 podrá ser un punto arbitrario del intervalo $[a, b]$ y en otros tendrá que ser un punto suficientemente próximo a la solución buscada. Geométricamente, habrá que evitar las dos situaciones siguientes:

- Que alguna de las iteraciones, x_n , caiga fuera del intervalo $[a, b]$ con lo que podría no tener sentido el cálculo de la siguiente iteración al estar x_n fuera del dominio de definición de la función f . Por ejemplo, en el caso de la ecuación $x + \ln(x) = 0$ tomando como punto inicial $x_0 = 3$, el valor de x_1 es negativo y no pertenece al dominio de definición $(0, +\infty)$ de la función $f(x) = x + \ln(x)$.
- Que el algoritmo quede inmerso en un ciclo, situación que puede aparecer si la función f presenta puntos de inflexión en el intervalo $[a, b]$.

Teorema. Condiciones suficientes de convergencia del método de Newton-Raphson.

Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$, si se cumple que :

- $f(a) \cdot f(b) < 0$
- $f'(x) \neq 0, \forall x \in [a, b]$
- $f''(x)$ no cambia de signo en todo el intervalo.

Entonces si partimos de cualquier punto inicial $x_0 \in [a, b]$ con la condición de que $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$, la sucesión $\{x_n\}$ dada por

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

converge a la solución s de la ecuación $f(x) = 0$.

Ejemplo 11. Resuelve la ecuación $x^5 - 3x^4 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{8} = 0$.

Llamemos $P(x) = x^5 - 3x^4 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}$

Tratamos de encontrar los intervalos donde se encuentren las posibles raíces reales del polinomio.

Buscamos un intervalo de acotación: $|s| < 1 + \frac{A}{|a_n|}$ con $A = \max\{|a_i|\} \Rightarrow |s| < 1 + \frac{3}{1} = 4$

Por tanto, cualquier raíz real del polinomio debe estar en el intervalo: $] -4, 4[$, $s \in] -4, 4[$

Puesto que la función polinómica $P(x)$ es continua, aplicamos el teorema de Bolzano en distintos subintervalos para ver los cambios de signo:

x_i	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$P(x_i)$	-1789.88	-484.38	-78.88	-3.38	0.125	-2.38	-16.88	-1.38	254.13

Hay 3 cambios de signo de los valores de la función, por el teorema de Bolzano, al menos hay una raíz real en cada uno de los intervalos $] -1, 0[$, $] 0, 1[$ y $] 3, 4[$.

Aplicamos el método de Newton-Raphson en el intervalo $] -1, 0[$ tomando como punto inicial $x_0 = -1$.

Para los cálculos reiterados se puede utilizar una calculadora que tenga la tecla

(valor anterior):

Se introduce primero el valor inicial $x_0: -1$

Como $P'(x) = 5x^4 - 12x^3 - \frac{1}{2}$, se introduce la fórmula: $\text{Ans} - \frac{\text{Ans}^5 - 3\text{Ans}^4 - 0.5\text{Ans} + 0.125}{5\text{Ans}^4 - 12\text{Ans}^3 - 0.5}$ y se pulsa la tecla .

Se obtiene el primer valor: $x_1 = -0.795455$ que sería el nuevo valor almacenado en ANS.

Pulsando sucesivamente la tecla se van obteniendo por iteración, las sucesivas aproximaciones a la raíz.

También se puede utilizar una hoja de cálculo:

i	x_i	$P(x_i)$	$P'(x_i)$	$x_{i+1} = x_i - \frac{P(x_i)}{P'(x_i)}$
0	-1	-3,375	16,5	-0,795455
1	-0,795455	-0,9968587	7,541716	-0,663275
2	-0,663275	-0,2523599	3,969279	-0,599697
3	-0,599697	-0,0407305	2,734767	-0,584803
4	-0,584803	-0,0018790	2,484801	-0,584047
5	-0,584047	-0,0000047	2,472484	-0,584045
6	-0,584045	0,0000000	2,472453	-0,584045

Hemos encontrado una primera raíz real con seis cifras decimales:

Repetimos el método en el intervalo $]0,1[$ tomando como punto inicial $x_0 = 0$:

i	x_i	$P(x_i)$	$P'(x_i)$	$x_{i+1} = x_i - \frac{P(x_i)}{P'(x_i)}$
0	0	0,125	-0,5	0,250000
1	0,250000	-0,0107422	-0,667969	0,233918
2	0,233918	-0,0002408	-0,638623	0,233541
3	0,233541	-0,0000001	-0,637978	0,233541
4	0,233541	0,0000000	-0,637978	0,233541

En este caso con menos iteraciones hemos encontrado una segunda raíz real con seis cifras decimales: $x_2 = 0.233541$.

Aplicamos el método en el intervalo $]3,4[$ tomando como punto inicial $x_0 = 3$:

i	x_i	$P(x_i)$	$P'(x_i)$	$x_{i+1} = x_i - \frac{P(x_i)}{P'(x_i)}$
0	3	-1,375	80,5	3,017081
1	3,017081	0,0317793	84,236944	3,016703
2	3,016703	0,0000158	84,153376	3,016703
3	3,016703	0,0000000	84,153334	3,016703

Al estar la raíz muy próxima al valor inicial dado, se han necesitado menos iteraciones para llegar al valor de la raíz con seis cifras decimales: $x_3 = 3.016703$.

Para hallar las otras dos raíces de la ecuación de grado 5 podemos aplicar la regla de Ruffini a partir de las 3 raíces reales halladas:

	1	-3	0	0	-0,5	0,125
-0,584045		-0,584045	2,093245	-1,222550	0,714024	-0,125
	1	-3,584045	2,093245	-1,222550	0,214024	0
			-			
0,233541		0,2335409	0,78247982	0,30611725	-0,214024	
	1	-3,350504	1,310765	-0,916433	0	
3,016703		3,0167033	1,00697891	0,916433		
	1	-0,333801	0,303786	0		

Y se resuelve la ecuación: $x^2 - 0.333801x + 0.303786 = 0$

$$x = \frac{0.333801 \pm \sqrt{0.333801^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0.303786}}{2} = \frac{0.333801 \pm \sqrt{-1.103721}}{2} =$$

$$= \frac{0.333801 \pm 1.050581i}{2} = \begin{cases} x_4 = 0.1669 + 0.525291i \\ x_5 = 0.1669 - 0.525291i \end{cases}$$

Por tanto, la ecuación $P(x) = x^5 - 3x^4 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{8} = 0$ tiene 3 raíces reales y 2 raíces complejas conjugadas:

$$\boxed{x_1 = -0.584045}, \quad \boxed{x_2 = 0.233541}, \quad \boxed{x_3 = 3.016703},$$

$$\boxed{x_4 = 0.1669 + 0.525291i}, \quad \boxed{x_5 = 0.1669 - 0.525291i}$$

Se puede ver la resolución gráfica de la ecuación aplicando el método de Newton-Raphson, en Geogebra, pulsando en estos enlaces:

<https://www.geogebra.org/m/gybmcraad>, <https://www.geogebra.org/m/zxrbrvr7v>

La ventaja de los métodos numéricos de resolución de ecuaciones es que son válidos para cualquier ecuación, no solamente para las ecuaciones polinómicas.

Ejemplo 12. Encuentra la raíz real de la ecuación $\sqrt{x} \cdot \text{sen}(x) - x^3 + 2 = 0$.

Llamemos $f(x) = \sqrt{x} \cdot \text{sen}(x) - x^3 + 2$

Tratamos de encontrar los intervalos donde se encuentren las posibles raíces reales de la función.

Puesto que la función f es continua en su dominio de definición $[0, +\infty)$, aplicamos el teorema de Bolzano en distintos subintervalos para ver los cambios de signo:

x_i	0	1	2	3	4
$f(x_i)$	2	1.84	-4.71	-24.76	-63.51



Hay 1 cambio de signo de los valores de la función, por el teorema de Bolzano, al menos hay una raíz real en el intervalo $]1, 2[$.

Aplicamos el método de Newton-Raphson tomando como punto inicial $x_0 = 1$.

Sabiendo que $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \text{sen}(x) + \sqrt{x} \cdot \cos(x) - 3x^2$ y utilizando una hoja de cálculo, obtenemos:

i	x_i	$f(x_i)$	$f'(x_i)$	$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$
0	1	1,8414709848	-2,0389622017	1,903141
1	1,903141	-3,5890215620	-10,973325332	1,576073
2	1,576073	-0,6595784141	-7,0603796485	1,482654
3	1,482654	-0,0463461975	-6,0785643576	1,475029
4	1,475029	-0,0002952046	-6,0011990077	1,474980
5	1,474980	-0,0000000122	-6,0007012387	1,474980
6	1,474980	0	-6,0007012180	1,474980
7	1,474980	0	-6,0007012180	1,474980

Hemos encontrado la raíz real de la ecuación con seis cifras decimales: $\boxed{x_1 = 1.474980}$.

Se puede ver la resolución gráfica de la ecuación aplicando el método de Newton-Raphson, en Geogebra, pulsando en estos enlaces y cambiando la expresión que aparece por la de esta función:

<https://www.geogebra.org/m/gybmcraad>, <https://www.geogebra.org/m/zxrbrvr7v>

Ejemplo 13. Encuentra las raíces de la ecuación $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$.

En este caso, se puede resolver por transformaciones algebraicas al tratarse de una ecuación palíndroma.

Las *ecuaciones palíndromas* (o recíprocas) son las ecuaciones polinómicas donde los coeficientes de términos equidistantes de los extremos son iguales, lo que significa que se leen igual de derecha a izquierda que de izquierda a derecha. Por ejemplo: $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$.

Este tipo de ecuaciones se suelen resolver haciendo el cambio de variable $y = x + \frac{1}{x}$.

Como $x = 0$ no es una raíz de la ecuación $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$, o sea, $x \neq 0$, dividimos por x^2 :

$$\frac{x^4 + x^3 + x^2 + x + 1}{x^2} = \frac{0}{x^2}, \quad x^2 + x + 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 0, \quad x^2 + \frac{1}{x^2} + x + \frac{1}{x} + 1 = 0$$

Se hace el cambio de variable $y = x + \frac{1}{x}$:

$$y^2 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2, \quad y^2 = x^2 + 2 \cdot \cancel{x} \cdot \frac{1}{\cancel{x}} + \frac{1}{x^2}, \quad y^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2, \quad y^2 - 2 = x^2 + \frac{1}{x^2}$$

Se sustituye y se convierte en una ecuación de segundo grado en y :

$$\underbrace{x^2 + \frac{1}{x^2}}_{y^2 - 2} + \underbrace{x + \frac{1}{x}}_y + 1 = 0, \quad y^2 - 2 + y + 1 = 0, \quad \underline{y^2 + y - 1 = 0}, \quad y = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Des hacemos el cambio de variable $y = x + \frac{1}{x}$:

$$x + \frac{1}{x} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}, \quad 2x^2 + (1 - \sqrt{5})x + 2 = 0, \quad x = \frac{-1 + \sqrt{5} \pm \sqrt{1 + 5 - 2\sqrt{5} - 16}}{4} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} \pm \frac{\sqrt{-10 - 2\sqrt{5}}}{4} =$$

$$= \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} \pm \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4} i = \begin{cases} x_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} + \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4} i \\ x_2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} - \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4} i \end{cases}$$

$$x + \frac{1}{x} = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}, \quad 2x^2 + (1 + \sqrt{5})x + 2 = 0, \quad x = \frac{-1 - \sqrt{5} \pm \sqrt{1 + 5 + 2\sqrt{5} - 16}}{4} = \frac{-1 - \sqrt{5}}{4} \pm \frac{\sqrt{-10 + 2\sqrt{5}}}{4} =$$

$$= \frac{-1 - \sqrt{5}}{4} \pm \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4} i = \begin{cases} x_3 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{4} + \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4} i \\ x_4 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{4} - \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4} i \end{cases}$$

6. Resolución de ecuaciones utilizando la función W de Lambert.

Muchas ecuaciones exponenciales se resuelven utilizando logaritmos.

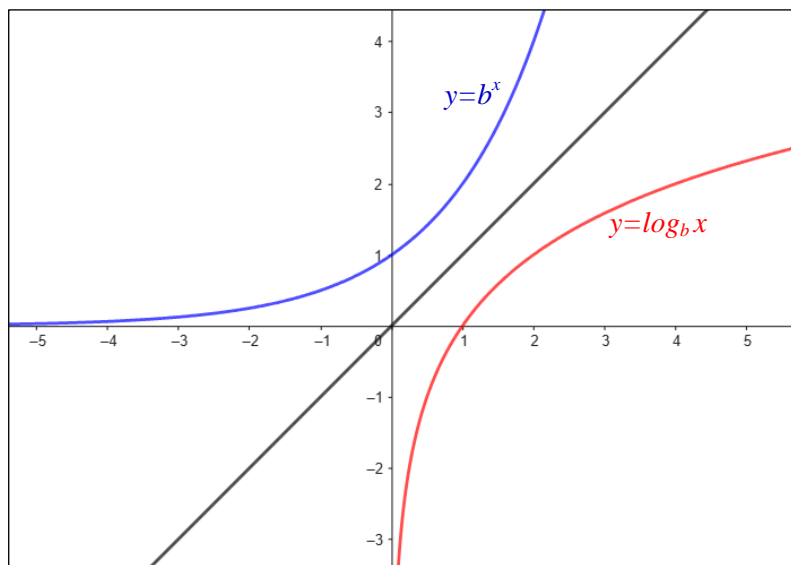
El logaritmo es la operación que consiste en encontrar el valor del exponente conociendo la base y el resultado:

$$b^x = a \Leftrightarrow x = \log_b a$$

Resulta que el logaritmo es la función inversa de la función exponencial:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty), f(x) = b^x \quad (b > 0, b \neq 1) \Leftrightarrow f^{-1}: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f^{-1}(x) = \log_b x$$

Y por tanto, las gráficas de ambas funciones son simétricas respecto de la bisectriz $y = x$, como se muestra en el gráfico:



Utilizando logaritmos podemos resolver ecuaciones exponenciales como esta: $2^x - 10 = 0$.

$$2^x = 10$$

y tomando logaritmos en los dos miembros de la igualdad y aplicando la propiedad del logaritmo de una potencia, se llega a obtener la solución:

$$\log 2^x = \log 10, \quad x \log 2 = 1, \quad x = \frac{1}{\log 2}, \quad \boxed{x = 3,3219\dots}$$

Vamos a ver otra operación menos conocida llamada **producto logaritmo** o **función W de Lambert** que nos va a permitir resolver otro tipo de ecuaciones donde aparecen potencias y exponenciales a la vez, como por ejemplo: $2^x - x = 2$.

La operación **producto logaritmo** consiste en encontrar el mismo valor que aparece en el coeficiente y el exponente de la potencia de base el número e , conocido el resultado:

$$xe^x = a \Leftrightarrow x = W(a)$$

Por ejemplo, que $W(2)=0'8526\dots$ significa que ese es el valor por el que tengo que multiplicar a la potencia de base e elevado a ese mismo valor para que dé 2, o sea que $0'8526e^{0,8526} = 2$

Por tanto, la función **W de Lambert** es la función inversa de la función: $y = xe^x$

$$f(x) = xe^x \Leftrightarrow f^{-1}(x) = W(x)$$

Vamos a determinar el dominio y recorrido de la función W . Para ello estudiamos la monotonía y los extremos de la función $y = f(x) = xe^x$:

$$f'(x) = e^x + xe^x = (1+x)e^x, \quad (1+x)e^x = 0, \quad e^x \neq 0 \quad 1+x=0, \quad \underline{x=-1}$$

$$\left. \begin{array}{l} f'(-2) = -e^{-2} < 0 \quad f \text{ es decreciente en } (-\infty, -1) \\ f'(0) = e^0 = 1 > 0 \quad f \text{ es creciente en } (-1, \infty) \end{array} \right\} \underline{\text{Min. rel. en } \left(-1, \frac{-1}{e}\right) = (-1, -0'3678\dots)}$$

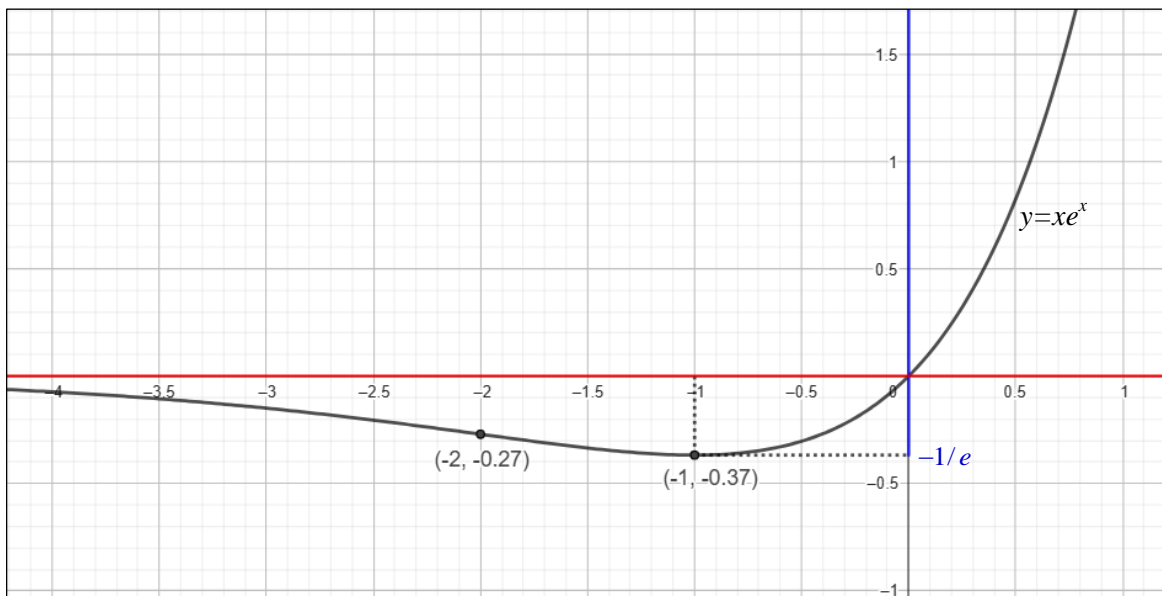
$$f''(x) = e^x + e^x + xe^x = (2+x)e^x, \quad (2+x)e^x = 0, \quad e^x \neq 0 \quad 2+x=0, \quad \underline{x=-2}$$

$$\left. \begin{array}{l} f''(-3) = -e^{-3} < 0 \quad f \text{ es concava en } (-\infty, -2) \\ f''(0) = 2e^0 = 2 > 0 \quad f \text{ es convexa en } (-2, \infty) \end{array} \right\} \underline{\text{Pto. Infl. en } \left(-2, \frac{-2}{e^2}\right) = (-2, -0'27067\dots)}$$

$$\underline{\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} -xe^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{e^x} = 0} \quad \underline{\text{A.H. por la izqda } (x \rightarrow -\infty) \quad y=0}$$

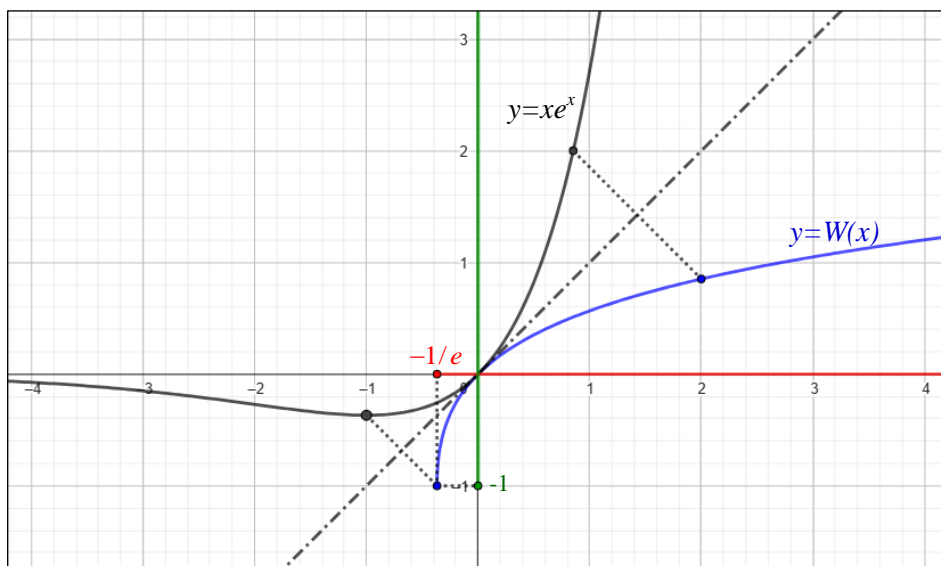
Con estos datos el mínimo relativo es mínimo absoluto, por tanto:

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R}, \quad \text{Recorrido}(f) : \left[\frac{-1}{e}, +\infty\right), \quad f : \mathbb{R} \rightarrow \left[\frac{-1}{e}, +\infty\right), \quad f(x) = xe^x$$

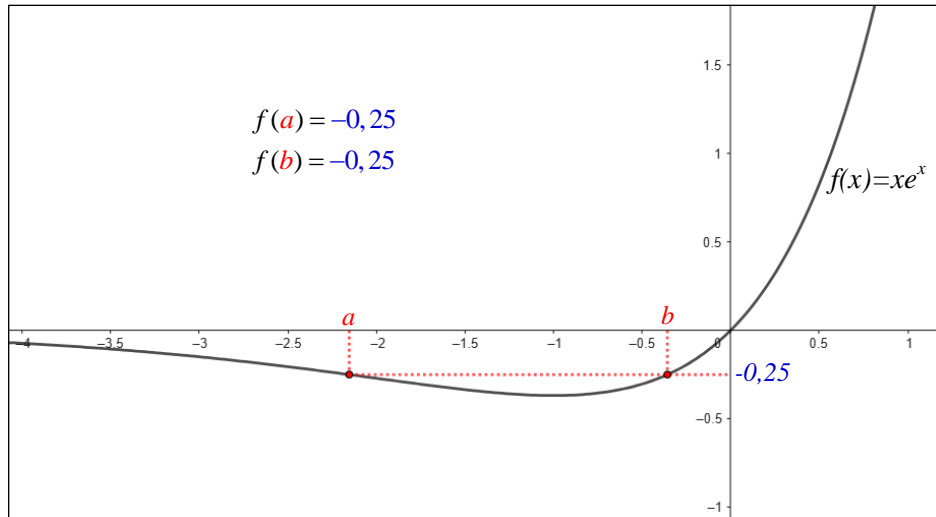


Entonces el dominio de definición de la función W de Lambert es el recorrido o rango de la función f , al ser la inversa de dicha función: $\text{Dom}(W) = \text{Rec}(f) = \left[\frac{-1}{e}, +\infty\right)$:

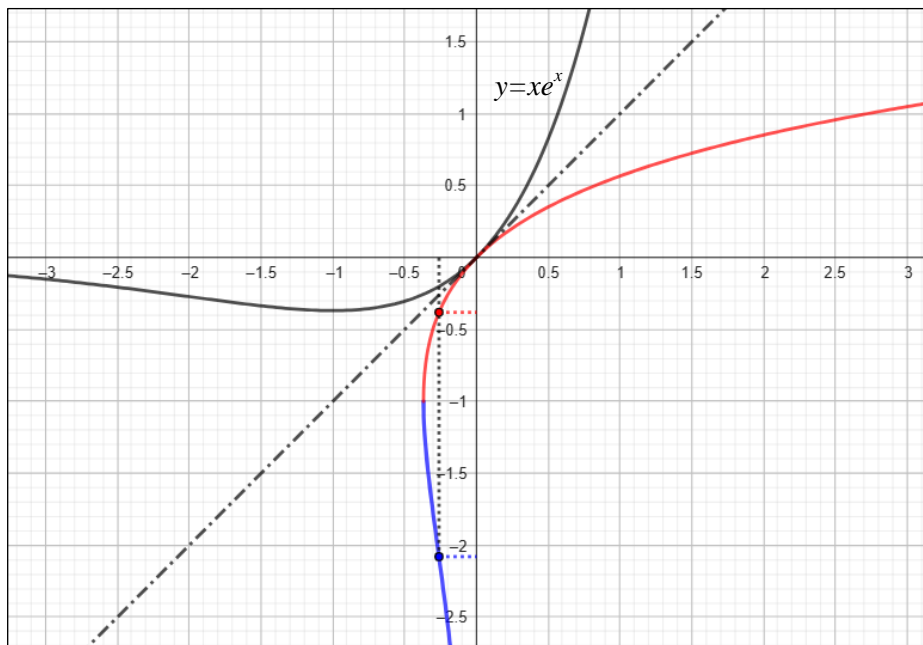
$$f : \mathbb{R} \rightarrow \left[\frac{-1}{e}, +\infty\right), \quad f(x) = xe^x \leftrightarrow W : \left[\frac{-1}{e}, +\infty\right) \rightarrow \mathbb{R}, \quad W(x) = f^{-1}(x)$$



Observamos que la función f no es inyectiva en el intervalo $(-\infty, 0)$, por ejemplo para el valor $y = -0,25$ hay dos valores de x :



Por tanto, la función W para valores de $x \in \left[-\frac{1}{e}, 0\right]$ les pueden corresponder valores de $y \in [-1, 0]$ o también valores de $y \in (-\infty, -1)$, como se muestra en el gráfico:



Sucede lo mismo que para las funciones potenciales de exponente par, por ejemplo

$$f: \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty), f(x) = x^2,$$

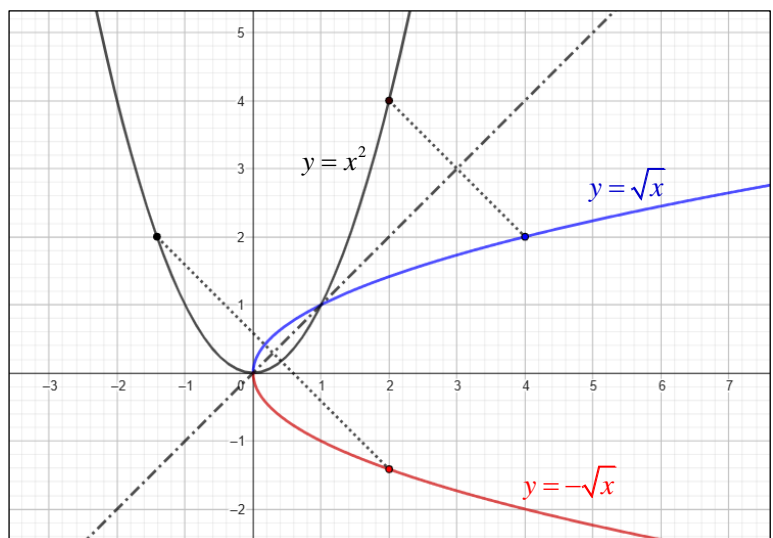
la función inversa se puede definir:

$$f^{-1}: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty), f^{-1}(x) = +\sqrt{x}$$

o

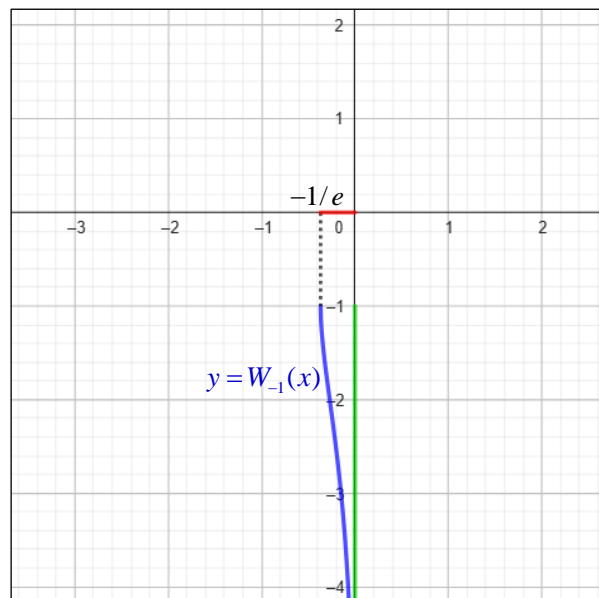
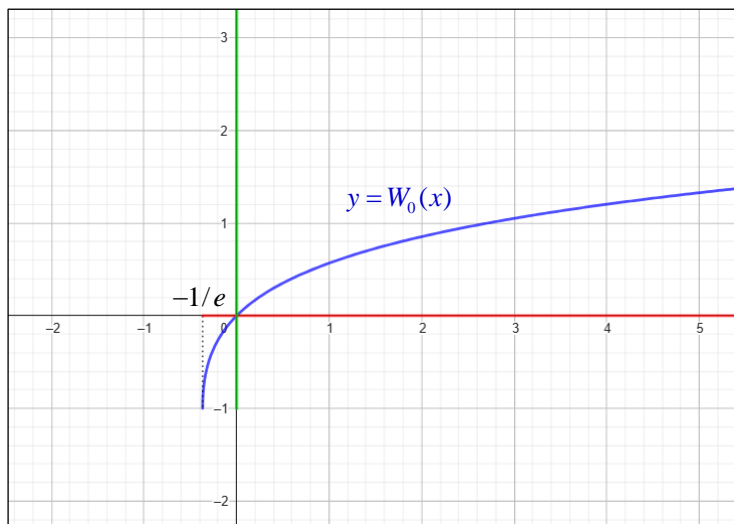
$$f^{-1}: [0, +\infty) \rightarrow (-\infty, 0], f^{-1}(x) = -\sqrt{x}$$

La gráfica presenta dos ramas.



También la gráfica de W presenta dos ramas, y entonces la función W de Lambert se define como la función inversa de la función f de la siguiente forma:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \left[\frac{-1}{e}, +\infty \right), \quad f(x) = xe^x \leftrightarrow \begin{cases} W_0: \left[\frac{-1}{e}, +\infty \right) \rightarrow [-1, +\infty) & , \quad W_0(x) = f^{-1}(x) \\ W_{-1}: \left[\frac{-1}{e}, 0 \right) \rightarrow (-\infty, -1) & , \quad W_{-1}(x) = f^{-1}(x) \end{cases}$$



La W_0 se considera la rama principal y se suele escribir sin el subíndice 0, $W(x) = W_0(x)$.

Las calculadoras convencionales sí nos permiten hacer los cálculos con logaritmos o razones trigonométricas pero no tienen la función del cálculo de W de Lambert.

Tendríamos que utilizar calculadoras online.

WolframAlpha utiliza el comando: **Productlog(a)=Productlog(0,a)=W₀(a)** y

Productlog(-1,a)=W₋₁(a).

Ejemplos: $\left\{ \begin{array}{l} \text{Productlog}(5)=\text{Productlog}(0,5)=W_0(5)=1.3267... \\ \text{Productlog}(-0.25)=W_0(-0.25)=-0.3574... \\ \text{Productlog}(-1,-0.25)=W_{-1}(-0.25)=-2.15329... \end{array} \right.$

Geogebra utiliza el comando **LambertW(a)=LambertW(a,0)=W₀(a)** y **LambertW(a,-1)=W₋₁(a)**

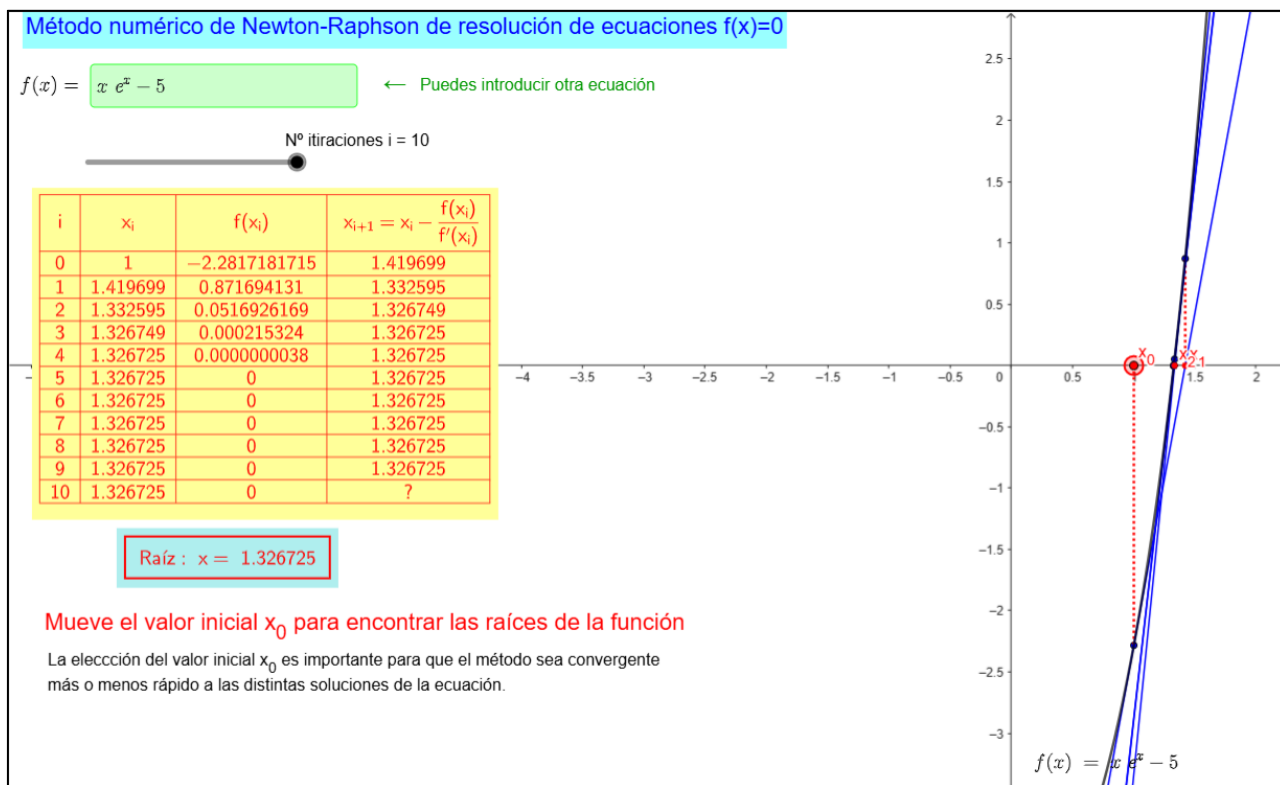
Ejemplos: $\left\{ \begin{array}{l} \text{LambertW}(5)=\text{LambertW}(5,0)=W_0(5)=1.3267... \\ \text{LambertW}(-0.25)=W_0(-0.25)=-0.3574... \\ \text{LambertW}(-0.25,-1)=W_{-1}(-0.25)=-2.15329... \end{array} \right.$

También podemos utilizar el método numérico de Newton-Raphson de resolución de ecuaciones para calcular los valores de la función W de Lambert.

Por ejemplo, para calcular $W(5)$, resolvemos la ecuación $xe^x - 5 = 0$ pues la solución es:

$$xe^x = 5, \quad W(xe^x) = W(5), \quad \underline{x = W(5)}$$

Utilizando este applet de Geogebra: <https://www.geogebra.org/m/zxrbvr7v> e introduciendo como función $f(x) = xe^x - 5$ y tomando como punto inicial el valor $x_0 = 1$, obtenemos que la solución es $x = 1,326725 = W(5)$:



Puesto que W es la función inversa de $f(x) = xe^x$, $W(x) = f^{-1}(x)$, resulta que:

$$\begin{cases} f^{-1} \circ f(x) = x \Rightarrow W(f(x)) = x, & \boxed{W(xe^x) = x} \\ f \circ f^{-1}(x) = x \Rightarrow f(W(x)) = x, & \boxed{W(x)e^{W(x)} = x} \end{cases}$$

Entonces para

$$\begin{cases} x = 0 \rightarrow W(0) = W(0 \cdot e^0) = 0 \\ x = 1 \rightarrow W(e) = W(1 \cdot e^1) = 1 \\ x = -1/e \rightarrow W\left(\frac{-1}{e}\right) = W(-1 \cdot e^{-1}) = -1 \end{cases}$$

Para hallar la derivada de la función W , puesto que la función W de Lambert no puede expresarse en términos de funciones elementales conocidas, vamos a derivar implícitamente en la expresión:

$$W(x)e^{W(x)} = x$$

$$W'(x)e^{W(x)} + W(x)e^{W(x)}W'(x) = 1, \quad W'(x)e^{W(x)}(1+W(x)) = 1, \quad W'(x) = \frac{1}{e^{W(x)}(1+W(x))}$$

$$W'(x) = \frac{1}{e^{W(x)} + W(x)e^{W(x)}}, \quad \boxed{W'(x) = \frac{1}{e^{W(x)} + x}} \text{ para } x \neq \frac{-1}{e} \text{ puesto que:}$$

$$W'\left(\frac{-1}{e}\right) = \frac{1}{e^{W(-1/e)} - \frac{1}{e}} = \frac{1}{e^{-1} - \frac{1}{e}} = \frac{1}{0}, \text{ o sea que la función } W \text{ no es derivable en } x = \frac{-1}{e}.$$

$$W'(0) = \frac{1}{e^{W(0)} + 0} = \frac{1}{e^0} = \frac{1}{1} = 1, \text{ por tanto, la recta tangente de la función } W \text{ en el punto } (0,0) \text{ es la bisectriz } y = x.$$

- La función W la dio a conocer por primera vez el matemático y físico alemán Johann H. Lambert en el siglo XVIII para dar solución a un tipo de ecuaciones, de apariencia simple, pero que no admiten ninguna solución elemental. Pero su importancia no se apreció hasta la década de 1990 cuando se vio que la función W de Lambert daba soluciones exactas a ciertos problemas de la física cuántica. Aparte de las matemáticas y la física se ha visto que tiene aplicaciones en informática y otras ramas de la ciencia.
- Vamos a ver unos ejemplos de ecuaciones en las que aparecen potencias y exponenciales o logaritmos y que vamos a resolver mediante la función W de Lambert.

El procedimiento para ello es ir transformando la ecuación a una expresión del tipo:

$$u(x) \cdot e^{u(x)} = A$$

para después aplicar la función W de Lambert en los dos miembros de la igualdad:

$$W(u(x) \cdot e^{u(x)}) = W(A)$$

y aplicar la propiedad de la función W de Lambert: $W(u(x) \cdot e^{u(x)}) = u(x)$

con lo que queda: $u(x) = W(A)$ y finalmente se despeja la incógnita x .

Ejemplo 14. Resuelve la ecuación $2^x = x + 2$.

Una solución evidente es $x = 2$. Pero, ¿es esa la única solución?

Vamos a ir transformando la ecuación en una expresión del tipo $u(x) \cdot e^{u(x)} = A$ para después poder aplicar la función W de Lambert a los dos miembros de la igualdad: $W(u(x) \cdot e^{u(x)}) = W(A)$ y obtener $u(x) = W(A)$ y ya poder despejar la incógnita x .

$$\begin{aligned} 2^x \cdot \underline{2^{-x}} &= (x+2) \cdot \underline{2^{-x}}, & 1 &= (x+2) \cdot 2^{-x}, & \underline{1 \cdot 2^{-2}} &= (x+2) \cdot 2^{-x} \cdot \underline{2^{-2}}, & 2^{-2} &= (x+2) \cdot 2^{-x-2} \\ -2^{-2} &= -(x+2) \cdot 2^{-(x+2)}, & -2^{-2} &= -(x+2) \cdot e^{\ln 2^{-(x+2)}}, & -2^{-2} &= -(x+2) \cdot e^{-(x+2)\ln 2} \\ -2^{-2} \cdot \underline{\ln 2} &= -(x+2) \cdot \underline{\ln 2} \cdot e^{-(x+2)\ln 2} \end{aligned}$$

Ya se tiene el segundo miembro de la igualdad de la forma $u(x) \cdot e^{u(x)}$. Ahora se aplica la función W a los dos miembros de la igualdad:

$$W(-2^{-2} \ln 2) = W(-(x+2) \ln 2 \cdot e^{-(x+2)\ln 2})$$

Con lo que queda: $W(-2^{-2} \ln 2) = -(x+2) \ln 2$

Y finalmente se despeja la incógnita x :

$$\frac{W(-2^{-2} \ln 2)}{\ln 2} = -(x+2), \quad \frac{-W(-2^{-2} \ln 2)}{\ln 2} = x+2, \quad \boxed{x = \frac{-W\left(\frac{-\ln 2}{4}\right)}{\ln 2} - 2}$$

Como $\frac{-\ln 2}{4} = -0'17328 \in \left] \frac{-1}{e}, 0 \right[=] -0'3678, 0[$ entonces $W\left(\frac{-\ln 2}{4}\right)$ tiene dos valores.

$$x_1 = \frac{-W_0\left(\frac{-\ln 2}{4}\right)}{\ln 2} - 2 \approx \boxed{-1'69}, \quad x_2 = \frac{-W_{-1}\left(\frac{-\ln 2}{4}\right)}{\ln 2} - 2 = \boxed{2}.$$

Comprobamos para $x = -1,69$, $2^{-1,69} = -1,69 + 2$, $0,3099269... \approx 0,31$

El valor $x_2 = 2$ se puede obtener de forma exacta, sin necesidad de utilizar las calculadoras online, haciendo transformaciones:

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{-W\left(\frac{-\ln 2}{4}\right)}{\ln 2} - 2 = \frac{-W\left(-\frac{1}{16} 4 \ln 2\right)}{\ln 2} - 2 = \frac{-W\left(-2^{-4} \cdot 4 \ln 2\right)}{\ln 2} - 2 = \frac{-W\left(-e^{\ln 2^{-4}} \cdot 4 \ln 2\right)}{\ln 2} - 2 = \\ &= \frac{-W\left(-e^{-4 \ln 2} \cdot 4 \ln 2\right)}{\ln 2} - 2 = \frac{-W\left(-4 \ln 2 e^{-4 \ln 2}\right)}{\ln 2} - 2 = \frac{-(-4 \ln 2)}{\ln 2} - 2 = \frac{4 \ln 2}{\ln 2} - 2 = 4 - 2 = \boxed{2} \end{aligned}$$

Ejemplo 15. Resuelve la ecuación $x^2 e^x = 2$.

$$\sqrt{x^2 e^x} = \pm \sqrt{2}, \quad \sqrt{x^2} \sqrt{e^x} = \pm \sqrt{2}, \quad x e^{x/2} = \pm \sqrt{2}, \quad \frac{x}{2} e^{x/2} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$W\left(\frac{x}{2} e^{x/2}\right) = W\left(\pm \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \quad \frac{x}{2} = W\left(\pm \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \quad x = 2 \cdot W\left(\pm \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Como $-\frac{\sqrt{2}}{2} = -0'7071... \notin \text{Dom}(W) = \left[\frac{-1}{e}, +\infty\right) = [-0'3678..., +\infty)$ entonces no existe el número real $W\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)$.

Por tanto, $x = 2 \cdot W\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\boxed{x = 0'9012...}$. Comprobación: $0,9012^2 \cdot e^{0,9012} = 1,999993357... \approx 2$.

Ejemplo 16. Resuelve la ecuación $x + \ln x = 3$

$$\ln x = 3 - x, \quad x = e^{3-x}, \quad \frac{x}{e^{3-x}} = 1, \quad x e^{x-3} = 1, \quad x \cdot \frac{e^x}{e^3} = 1$$

$$x e^x = e^3, \quad W\left(x e^x\right) = W\left(e^3\right), \quad \boxed{x = W\left(e^3\right) = 2'20794...}$$

Comprobación: $2.20794 + \ln(2.20794) = 2.99999995... \approx 3$.

Ejemplo 17. Resuelve la ecuación $x^x = 100$.

$$\ln x^x = \ln(100), \quad x \ln|x| = \ln 100$$

como $x > 0$ para que tenga sentido la operación x^x , entonces $|x| = x$

$$e^{\ln x} \ln x = \ln 100, \quad \ln x \cdot e^{\ln x} = \ln 100$$

$$W\left(\ln x \cdot e^{\ln x}\right) = W(\ln 100), \quad \ln x = W(\ln 100), \quad \boxed{x = e^{W(\ln 100)} = 3'597285...}$$

Comprobación: $3'597285^{3'597285} = 99'9999946... \approx 100$.

Ejemplo 18. Resuelve la ecuación $x^5 = 7^x$.

$$\ln x^5 = \ln 7^x, \quad 5 \ln|x| = x \ln 7,$$

como $7^x > 0$ entonces $x^5 > 0$ por lo cual $x > 0$ y entonces $|x| = x$

$$\frac{\ln x}{x} = \frac{\ln 7}{5}, \quad x^{-1} \ln x = \frac{\ln 7}{5}, \quad e^{\ln x^{-1}} \cdot \ln x = \frac{\ln 7}{5}$$

$$e^{-1 \cdot \ln x} \cdot \ln x = \frac{\ln 7}{5}, \quad -\ln x \cdot e^{-\ln x} = \frac{-\ln 7}{5}, \quad W(-\ln x \cdot e^{-\ln x}) = W\left(\frac{-\ln 7}{5}\right),$$

$$-\ln x = W\left(\frac{-\ln 7}{5}\right), \quad \ln x = -W\left(\frac{-\ln 7}{5}\right), \quad \underline{\underline{x = e^{-W\left(\frac{-\ln 7}{5}\right)}}}$$

Como $\frac{-\ln 7}{5} = -0'3891... \notin \text{Dom}(W) = \left[\frac{-1}{e}, +\infty\right) = [-0'3678..., +\infty)$ entonces no existe el número real $W\left(\frac{-\ln 7}{5}\right)$. Por tanto, la ecuación **no tiene solución real**.

Si tratamos de calcular el valor de $W\left(\frac{-\ln 7}{5}\right)$ en el programa WolframAlpha nos da un valor complejo, $W\left(\frac{-\ln 7}{5}\right) \approx 0'9624 + 0'3344i$.

Entonces en el campo de los números complejos \mathbb{C} , la solución es:

$$x = e^{-W\left(\frac{-\ln 7}{5}\right)} = e^{-0'9624 - 0'3344i} = \boxed{2'4729 - 0'8595i}$$

Lo comprobamos también utilizando WolframAlpha:

$$(2'4729 - 0'8595i)^5 = -12'4904 - 122'35i.$$

$$7^{2'4729 - 0'8595i} = -12'4874 - 122'347i$$

Ejemplo 19. Resuelve la ecuación $x^2 = e^x$.

Lo resolvemos por dos métodos:

- Método 1: Se toma logaritmos en los dos miembros de la igualdad:

$$\ln x^2 = \ln e^x, \quad 2 \ln|x| = x \ln e, \quad 2 \ln|x| = x \quad \text{como } x \neq 0 \quad \frac{\ln|x|}{x} = \frac{1}{2}, \quad x^{-1} \ln|x| = \frac{1}{2}$$

$$+ \text{ Si } x > 0 \quad x^{-1} \ln x = \frac{1}{2}, \quad e^{\ln x^{-1}} \ln x = \frac{1}{2}, \quad e^{-\ln x} \ln x = \frac{1}{2}, \quad -\ln x \cdot e^{-\ln x} = \frac{-1}{2}$$

$$W(-\ln x \cdot e^{-\ln x}) = W\left(\frac{-1}{2}\right), \quad -\ln x = W\left(\frac{-1}{2}\right), \quad \ln x = -W\left(\frac{-1}{2}\right), \quad \underline{\underline{x = e^{-W\left(\frac{-1}{2}\right)}}}$$

Como $\frac{-1}{2} = -0'5 \notin \text{Dom}(W) = \left[\frac{-1}{e}, +\infty\right) = [-0'3678..., +\infty)$ entonces $W\left(\frac{-1}{2}\right)$ no es un valor real.

+ Si $x < 0$

$$x^{-1} \ln(-x) = \frac{1}{2}, \quad -x^{-1} \ln(-x) = \frac{-1}{2}, \quad (-x)^{-1} \ln(-x) = \frac{-1}{2}, \quad e^{\ln(-x)^{-1}} \ln(-x) = \frac{-1}{2},$$

$$e^{-\ln(-x)} \ln(-x) = \frac{-1}{2}, \quad -\ln(-x) \cdot e^{-\ln(-x)} = \frac{1}{2}, \quad W(-\ln(-x) \cdot e^{-\ln(-x)}) = W\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$-\ln(-x) = W\left(\frac{1}{2}\right), \quad \ln(-x) = -W\left(\frac{1}{2}\right), \quad -x = e^{-W\left(\frac{1}{2}\right)}, \quad \boxed{x = -e^{-W\left(\frac{1}{2}\right)} = -0'703467...}$$

Comprobación: $\begin{cases} (-0'703467)^2 = 0'494865... \\ e^{-0'703467} = 0'494866... \end{cases}$

• Método 2: Tomando raíz cuadrada en los dos miembros de la igualdad:

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{e^x}, \quad |x| = e^{x/2}$$

+ Si $x > 0$, $|x| = x$

$$x = e^{x/2}, \quad \frac{x}{e^{x/2}} = 1, \quad xe^{-x/2} = 1, \quad \frac{-x}{2} e^{-x/2} = \frac{-1}{2}, \quad W\left(\frac{-x}{2} e^{-x/2}\right) = W\left(\frac{-1}{2}\right),$$

$$\frac{-x}{2} = W\left(\frac{-1}{2}\right), \quad \underline{x = -2 \cdot W\left(\frac{-1}{2}\right)}$$

Como $\frac{-1}{2} = -0'5 \notin \text{Dom}(W) = \left[\frac{-1}{e}, +\infty\right) = [-0'3678..., +\infty)$ entonces $W\left(\frac{-1}{2}\right)$ no es un valor real.

+ Si $x < 0$, $|x| = -x$

$$-x = e^{x/2}, \quad \frac{-x}{e^{x/2}} = 1, \quad -xe^{-x/2} = 1, \quad \frac{-x}{2} e^{-x/2} = \frac{1}{2}, \quad W\left(\frac{-x}{2} e^{-x/2}\right) = W\left(\frac{1}{2}\right),$$

$$\frac{-x}{2} = W\left(\frac{1}{2}\right), \quad \boxed{x = -2 \cdot W\left(\frac{1}{2}\right) = -0'703467...}$$

Vamos a ver que el resultado anterior y éste son equivalentes: $-e^{-W\left(\frac{1}{2}\right)} = -2W\left(\frac{1}{2}\right)$

$$\underline{x = -e^{-W(1/2)}}, \quad x \cdot e^{W(1/2)} = -1, \quad x \cdot W(1/2) e^{W(1/2)} = -1 \cdot W(1/2)$$

y aplicando la propiedad: $W(x)e^{W(x)} = x$

$$x \cdot \frac{1}{2} = -W(1/2), \quad \underline{x = -2 \cdot W(1/2)}.$$

Ejemplo 20. Resuelve la ecuación $3^{\sqrt{x}} + \sqrt{x} = 30$.

A simple vista una solución es $x = 9$.

En primer lugar hacemos un cambio de variable para facilitar los cálculos: $t = \sqrt{x}$

$$3^t + t = 30$$

$$3^t = 30 - t, \quad \underline{3^t \cdot 3^{-t}} = (30 - t) \cdot \underline{3^{-t}}, \quad 1 = (30 - t) 3^{-t}, \quad \underline{1 \cdot 3^{30}} = (30 - t) \cdot \underline{3^{-t} \cdot 3^{30}}, \quad 3^{30} = (30 - t) \cdot 3^{30-t}$$

$$3^{30} = (30-t) \cdot e^{\ln 3^{30-t}}, \quad 3^{30} = (30-t) \cdot e^{(30-t)\ln 3}, \quad 3^{30} \cdot \underline{\underline{\ln 3}} = (30-t) \cdot \underline{\underline{\ln 3}} \cdot e^{(30-t)\ln 3},$$

$$W\left(\underline{\underline{(30-t)\ln 3}} \cdot e^{(30-t)\ln 3}\right) = W(3^{30} \ln 3), \quad \underline{\underline{(30-t)\ln 3}} = W(3^{30} \ln 3), \quad 30-t = \frac{W(3^{30} \ln 3)}{\ln 3},$$

$$-t = \frac{W(3^{30} \ln 3)}{\ln 3} - 30, \quad \boxed{t = 30 - \frac{W(3^{30} \ln 3)}{\ln 3}}$$

Para obtener el valor exacto hacemos las siguientes transformaciones:

$$t = 30 - \frac{W(3^{30} \ln 3)}{\ln 3} = 30 - \frac{W(3^3 3^{27} \ln 3)}{\ln 3} = 30 - \frac{W(27 e^{\ln 3^{27}} \ln 3)}{\ln 3} = 30 - \frac{W((27 \ln 3) e^{27 \ln 3})}{\ln 3} =$$

$$= 30 - \frac{\cancel{27 \ln 3}}{\cancel{\ln 3}} = 30 - 27 = 3, \quad \underline{\underline{t = 3}}$$

Deshaciendo el cambio de variable: $t = \sqrt{x}$, $3 = \sqrt{x}$, $3^2 = (\sqrt{x})^2$, $3^2 = x$, $\boxed{x = 9}$.